Pures Mathématiques

Algèbre et Géométrie dans l'espace

Troisième secondaire **Livre de l'élève**

Pures Mathématiques

Algèbre et Géométrie dans l'espace

Troisième secondaire Livre de l'élève

Nom : ....

Classe : ....

Établissement : ....

Rédigé par

M. Kamal Youness Kabsha

Prof.Dr. Mohamed Hussein Fahmy

M. Ossama Gaber Abdel Hafez

M. Ibrahim Abdel Latif Al Saghir

Première édition	2016/2017
Dépôt légal No	8705 / 2016
I.S.B.N	978 - 977 - 706 - 033 - 2

Introduction

بسم الله الرحمن الرحيم

En présentant ce manuel, nous avons le plaisir de vous clarifier la philosophie dont nous nous sommes inspirés pour édifier son contenu, en la résumant dans ce qui suit :

1. Développement de l'unité de la connaissance et son intégration dans les mathématiques ainsi que l'intégration des notions et la liaison entre tous les différents domaines des mathématiques scolaires.

2. Fournir à l'apprenant tout ce qui est des informations opératoires, des notions et des stratégies de résolution des problèmes.

3. Adopter des normes nationales de l'enseignement et les niveaux éducatifs en Égypte à partir de :

   a) La détermination de ce que l'élève doit apprendre et les motifs de cet apprentissage.

   b) La détermination précise des compétences attendues de l'élève en renforçant ce qui suit :
   L'apprentissage des mathématiques doit constituer un but à atteindre pour l'apprenant durant toute sa vie - la motivation de l'apprenant par l'étude des mathématiques - la capacité de l'élève à travailler individuellement ou en groupe - l'activité, la persistance, l'assiduité et la créativité de l'apprenant - l'aptitude de l'apprenant à communiquer en langage mathématiques.

4. Suggérer des méthodes et des stratégies d'enseignement dans le livre du maître.

5. Suggérer des activités variées correspondant au contenu pour que l'apprenant choisisse l'activité qui lui convient.

6. Estimer les mathématiques et leur apport sur le plan humain au niveau mondial et national, connaître les contributions et les exploits des savants musulmans, arabes et étrangers.

A la lumière de ce qui précède, ce manuel tient compte de ce qui suit :

★ Le manuel comporte deux domaines : L'algèbre, et la géométrie dans l'espace. On l'a conçu en unités intégrées et interconnectées contenant chacune une introduction qui indique les compétences attendues de l'élève, un organigramme et le lexique utilisé en arabe et en anglais. Chaque unité comprend des leçons dont l'objectif est titré « A apprendre » et chacune de ces leçons commence par l'idée principale du contenu et présente la matière scientifique du simple au complexe, graduellement, en englobant des activités qui relient les mathématiques aux autres disciplines et à la vie pratique. Ces activités correspondent au niveau de compétence des élèves et à leurs différences individuelles sous la rubrique « Décelez l'erreur » pour remédier aux erreurs communes des élèves tout en renforçant le travail coopératif. Le manuel contient également des questions en lien avec à l'environnement et la manière de les traiter.

★ Chaque leçon contient des exemples échelonnés du plus facile au plus difficile, des niveaux de réflexion variés suivis d'exercices sous la rubrique « Essayez de résoudre » et se termine par « Exercices » qui propose des problèmes variés abordant les notions et les compétences étudiées au cours de la leçon.

★ L'unité se termine par un résumé comportant les notions et les instructions données dans l'unité suivies des exercices généraux sur les notions et les capacités acquises.

★ Les unités se terminent par une épreuve cumulative pour mesurer le niveau des compétences attendues acquises à la fin de chaque unité.

★ Le manuel s'achève par des Épreuves générales pour évaluer les notions et les compétences acquises durant le semestre scolaire.

Finalement, nous espérons qu'avec ce manuel nous accomplirons le bien pour nos élèves et pour notre chère Égypte. Dieu nous est témoin, qu'il nous guide vers le bon chemin.

Sommaire

[I] Algèbre

Unité (1) : Arrangements, Combinaisons et formule du binôme

1 - 1 Principe du dénombrement - Arrangements - Combinaisons 4
2 - 1 Formule du binôme à puissance entière positive 13
3 - 1 Trouver le terme contenant x^R dans le développent d'un binôme 22
4 - 1 Rapport entre deux termes consécutifs dans le développent d'un binôme 27
Résumé de l'unité 30
Exercices généraux 31
Épreuve cumulative 35

Unité (2) : Nombres complexes

1 - 2 Forme trigonométrique d'un nombre complexe 38
2 - 2 Théorème de Moivre 50
3 - 2 Racines cubiques de l'unité 55
Exercices généraux 59
Résumé de l'unité 61
Épreuve cumulative 63

Unité (3) : Déterminants et Matrices

1 - 3 Déterminants 66
2 - 3 Matrices 79
4 - 3 Résolution d'un système d'équations linéaires en utilisant l'inverse d'une matrice 86
Résumé de l'unité 97
Exercices généraux 99
Épreuve cumulative 102

Algèbre

Sommaire

[II] Géométrie dans l'espace

Unité (1) : Géométrie et mesure dans deux et dans trois dimensions

1 - 1 **Repère orthogonal dans trois dimensions** 106

2 - 1 **Vecteurs dans l'espace** 114

3 - 1 **Produit des vecteurs** 123

Résumé de l'unité 138

Exercices généraux 144

Épreuve cumulative 146

Unité (2) : Droites et plans dans l'espace

1 - 2 **Équation d'une droite dans l'espace** 150

2 - 2 **Équation d'un plan dans l'espace** 160

Résumé de l'unité 171

Exercices généraux 173

Épreuve cumulative 174

Épreuves générales et réponses

Épreuves générales 176

Réponses de quelques exercices 197

Géométrie dans l'espace

[I] Algèbre

Unité (1)

Arrangements, Combinaisons et formule du binôme

Introduction de l'unité

Nasir al-Din al-Tusi (1201- 1274) est né à Gahroud près de la ville de Tus en Iran dans une famille d'érudits. Disciple de Kamal al-Din El Moussily et Moeen El Dine el Masry, il étudia la sagesse, la philosophie, l'astronomie et les mathématiques. Il a une grande contribution dans le calcul de la probabilité de réalisation de différents phénomènes et l'utilisation des arrangements et des combinaisons. Cardan (1501-1576) s'est intéressé au calcul du nombre de possibilités par le principe de dénombrement ce qui a permis un grand progrès dans l'architecture de l'ordinateur qui est la conception et la construction des opérations fonctionnelles de l'ordinateur. Cette unité comporte le principe du dénombrement et la relation entre les arrangements et les combinaisons et leurs utilisations dans la résolution de certains problèmes mathématiques, et présente la théorie du binôme et son utilisation dans les applications mathématiques et de la vie quotidienne.

Objectifs de l'unité

Après l'étude de l'unité, et après avoir réalisé les activités, il est attendu que l'élève soit capable de :

- Reconnaître le principe du dénombrement (Règle de l'addition).
- Reconnaître la relation entre l'arrangement et la combinaison comme moyens et méthodes de dénombrement.
- Déduire des formules et des résultats concernant l'arrangement et la combinaison.
- Utiliser l'arrangement et la combinaison pour résoudre des problèmes mathématiques de la vie quotidienne dans les différents domaines.
- Reconnaître la formule du binôme à une puissance entière positive.
- Déduire le terme général dans le développement d'un binôme.
- Déduire le rapport entre un terme et le terme qui le précède dans le développement d'un binôme.
- Trouver le coefficient d'un terme dans le développement d'un binôme selon le rang de ce terme.
- Trouver le coefficient d'une puissance de la variable x dans le développement de $(x + y)^n$.
- Trouver le terme constant dans le développement de $(x + y)^n$.
- Trouver le coefficient du plus grand terme dans le développement d'un binôme.
- Trouver le terme médian dans le développement d'un binôme si n est un nombre pair et les deux termes médians si n est un nombre impair.
- Déduire des relations entre les combinaisons en utilisant le développement d'un binôme.
- Déduire la relation entre le triangle de Pascal et les coefficients dans le développement d'un binôme.
- Déduire quelques rythmes dans le triangle de Pascal.
- Résoudre diverses applications mathématiques et quotidiennes sur la formule du binôme.

Expressions de base

- *Principe de dénombrement*
- *Arrangements*
- *Combinaisons*
- *Formule du binôme*

Leçons de l'unité

Leçon (1 – 1) : Principe du dénombrement - Arrangements - Combinaisons

Leçon (1 – 2) : Formule du binôme à une puissance entière positive

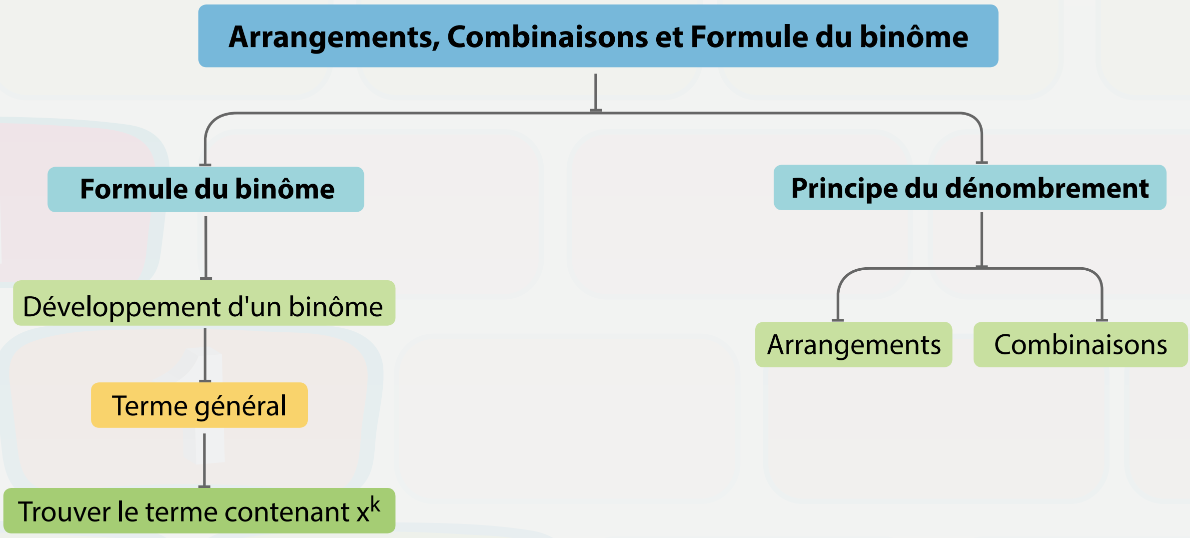
Leçon (1 – 3) : Trouver le terme contenant x^k dans le développement d'un binôme

Leçon (1 – 4) : Rapport entre deux termes consécutifs dans le développement d'un binôme

Outils et moyens

- *Une calculatrice scientifique*

Organigramme de l'unité



Unité (1)

1 - 1

Principe du dénombrement - Arrangements - Combinaisons

À apprendre

- *Principe du dénombrement (Principe multiplicatif)*
- *Plus de relations entre les arrangements et les combinaisons*
- *Applications sur l'utilisation des arrangements et des combinaisons dans la vie quotidienne.*

Expressions de base

- *Arrangements*
- *Combinaisons*
- *Principe du dénombrement*

Matériel utilisé

- *Calculatrice scientifique avancée*

Introduction

(1) Principe du dénombrement :

Nous avons déjà étudié le principe du dénombrement (Principe multiplicatif) qui est :

"Si m est le nombre de façons d'effectuer un travail et n est le nombre de façons d'effectuer un autre travail, alors le nombre de façons d'effectuer les deux travaux simultanément est ($m \times n$).

Réfléchir et discuter

Combien de nombres formés de trois chiffres différents peut-on former parmi les chiffres de l'ensemble {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5} ?

Le nombre est formé de trois chiffres (trois places). Donc ;

Il y a 5 possibilités pour le choix du chiffre des unités.

Il y a 4 possibilités pour le choix du chiffre des dizaines.

Il y a 3 possibilités pour le choix du chiffre des centaines.

Par conséquent, le nombre de possibilités de former un nombre de trois chiffres différents parmi les chiffres donnés $= 5 \times 4 \times 3 = 60$

Pour réfléchir : Combien de nombres formés de trois chiffres (Possibilité de répéter des chiffres) peut-on former parmi les chiffres de l'ensemble {1, 2, 3, 4, 5}?

Apprendre

Principe du dénombrement (Principe additif)

"Si m est le nombre de façons d'effectuer un travail et n est le nombre de façons d'effectuer un autre travail, alors le nombre de façons d'effectuer le premier travail ou le deuxième travail est ($m + n$).

Exemple

1) Une classe mixte contient 9 garçons et 6 filles. De ces élèves, on veut former une équipe de 4 personnes de même sexe. Combien y a-t-il de façons de former cette équipe ?

Solution

a) Nombre de façons pour former une équipe constituée de 4 garçons $= C_9^4 = 126$

b Nombre de façons pour former une équipe constituée de 4 filles = $C_6^4 = 15$

Nombre de façons de former une équipe constituée de 4 personnes de même sexe = 126 + 15 = 141

Essayez de résoudre :

1) On choisit 3 personnes d'un groupe constitué de 5 hommes et 4 femmes. Déterminer le nombre de façons de former un groupe de trois personnes dans chacun des cas suivants :

a Si les trois personnes choisies sont de même sexe.

b Si deux parmi les trois personnes choisies sont de même sexe.

Exemple

2) Une feuille d'examen contient 8 questions. L'élève doit répondre à 6 parmi elles contenant au moins deux parmi les quatre premières questions. Quel est le nombre de choix possible pour répondre à ces questions ?

Solution

a L'élève peut choisir deux questions parmi les quatre premières et quatre questions parmi les autres. Dans ce cas, le nombre de choix est $C_4^2 \times C_4^4 = 6$

b L'élève peut choisir trois questions parmi les quatre premières et trois questions parmi les autres. Dans ce cas, le nombre de choix est $C_4^3 \times C_4^3 = 16$

c L'élève peut choisir les quatre premières questions et deux questions parmi les autres. Dans ce cas, le nombre de choix est $C_4^4 \times C_4^2 = 6$

Donc le nombre de choix possible pour répondre à ces questions

$= C_4^2 \times C_4^4 + C_4^3 \times C_4^3 + C_4^4 \times C_4^2 = 6 + 16 + 6 = 28$

Essayez de résoudre :

2) Dans l'une des facultés, un étudiant étudie 8 matières. Il n'a le droit de passer à l'année suivante que s'il réussit dans au moins 6 de ces matières. Quel est le nombre de façons permettent à cet étudiant de passer à l'année suivante ?

Nombre de choix d'un échantillon avec ou sans remise

Si on choisit r objets parmi n objets, il faut tenir en compte les cas suivants :

1) Si le choix est avec remise et en tenant compte de l'ordre, les nombre de choix = n^r

- Le nombre de possibilités de former un nombre de deux chiffres parmi les chiffres de l'ensemble { 1, 2, 3, 4, 5} = $5^2 = 25$

2) Si le choix est avec remise et sans tenir compte de l'ordre, les nombre de choix = C_{n+r-1}^r

- Le nombre de possibilités de distribuer 3 boules identiques dans 4 boîtes = $C_{4+3-1}^3 = C_6^3 = 20$

3) Si le choix est sans remise et en tenant compte de l'ordre, les nombre de choix = A_n^r

- Le nombre de possibilités de stationnement de 4 voitures dans un parking contenant 10 places $A_{10}^4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$

4) Si le choix est sans remise et sans tenir compte de l'ordre, les nombre de choix = C_n^r

- Le nombre de possibilités de former une équipe constituée de 5 personnes parmi 12 personnes $C_{12}^5 = 792$

Exemple

3 Un sac contient 12 boules rouges et 8 boules blanches. Trouver le nombre de façons de tirer 3 boules rouges et 2 boules blanches dans chacun des cas suivants :

a si le tirage est avec remise et en tenant compte de l'ordre.

b si le tirage est sans remise et en tenant compte de l'ordre.

c si le tirage est sans remise et sans tenir compte de l'ordre.

Solution

a Le nombre de façons de tirer $= 12^3 \times 8^2 = 110592$

b Le nombre de façons de tirer $= A_{12}^3 \times A_8^2 = 73920$

c Le nombre de façons de tirer $= C_{12}^3 \times C_8^2 = 6160$

Essayez de résoudre :

3 Dans l'exemple précédent, trouver le nombre de façons de tirer 5 boules de même couleur dans chacun des cas précédents.

Réflexion critique : Trouver le nombre de façons de garer 4 voitures dans un parking contenant 10 places :

a si le parking est circulaire.

b si le parking est sous la forme d'une rangée.

(2) Arrangements :

Vous avez déjà étudié la notion d'arrangements est ses relations fondamentales.

On sait que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant r$, on a :

1) $A_n^r = n(n-1)(n-2) \times \ldots\ldots \times (n-r+1)$

2) $A_n^n = n! = n(n-1)(n-2) \times \ldots\ldots \times 3 \times 2 \times 1$

3) $A_n^r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

4) $n! = n(n-r)! = n(n-1)(n-2)! = \ldots\ldots$

Savez-vous ?

$A_n^r \in \mathbb{Z}^+$

$n! \in \mathbb{Z}^+$

$0! = 1! = 1$

$A_n^0 = 1$

$A_n^1 = n$

Exemple

4 Trouver la valeur de n dans chacun des cas suivants :

a $A_{3n-5}^5 = 2520$ b $(n+2)! = 90(n!)$

Solution

a $\because A_{3n-5}^5 = 2520$ et $\because A_7^5 = 2520$ $\therefore A_{3n-5}^5 = A_7^5$ $\therefore 3n-5=7$ $\therefore n=4$

b $\because (n+2)! = 90(n)!$ $\therefore \dfrac{(n+2)!}{n!} = 90$ $\therefore A_{n+2}^2 = A_{10}^2$ $\therefore n+2=10$ $\therefore n=8$

Essayez de résoudre :

4 Trouver la valeur de r dans chacun des cas suivants :

a $A_8^{3r-1} = 6720$ b $A_9^{r-4} = 9!$

Exemple

(5) Si $A_8^{n-3} = A_8^{n-3}$, trouver la valeur de n.

Solution

$\because A_8^{n-3} = A_8^{n-3}$ $\quad \therefore 8 \geqslant n-3 \geqslant 0$ $\quad \therefore 11 \geqslant n \geqslant 3$ $\quad \therefore n \in \{3, 4, 5, 6, \dots, 10, 11\}$

Essayez de résoudre :

(5) Si $A_9^{n-4} = A_9^{n-4}$, trouver la valeur de n.

Exemple

(6) Trouver la valeur de r si $A_{56}^{r+6} : A_{54}^{r+3} = 30800 : 1$

Solution

$\because A_{56}^{r+6} : A_{54}^{r+3} = 30800 : 1$ $\quad \therefore \frac{56!}{(50-r)!} \times \frac{(51-r)!}{54!} = 30800$

$\therefore 56 \times 55\,(51-r) = 30800$ $\quad \therefore 51 - r = 10$ $\quad \therefore r = 41$

Essayez de résoudre :

(6) Si $A_{2n+1}^{n-1} : A_{2n-1}^{n} = 3 : 5$, trouver la valeur de n.

Exemple

(7) Si $A_{n-2}^{r-2} : A_{n-2}^{r} = 1 : 42$, $A_7^{r-3} = 840$, trouver la valeur de n et r.

Solution

$\because A_7^{r-3} = 840$ et $A_7^4 = 840$ $\quad \therefore A_7^{r-3} = A_7^4$ $\quad \therefore r - 3 = 4$ $\quad \therefore r = 7$

$\because A_{n-2}^{5} : A_{n-2}^{7} = 1 : 42$ $\quad \therefore \frac{(n-2)!}{(n-7)!} \times \frac{(n-9)!}{(n-2)!} = \frac{1}{42}$

$\therefore (n-7)(n-8) = 42$ $\quad \therefore A_{n-7}^{2} = A_7^2$ $\quad \therefore n - 7 = 7$ $\quad \therefore n = 14$

Essayez de résoudre :

(7) Trouver la valeur de n et r dans chacun des cas suivants :

a $A_{n-r}^{2} = 90$ et $A_{n+r}^{2} = 380$ $\qquad$ **b** $A_n^r = 60480$ et $r! = 720$

Exemple

(8) Si $A_n^r = 120$, trouver les valeurs possibles de n et r.

Solution

1) $A_n^r = 6 \times 5 \times 4 = A_6^3$ $\quad \therefore n = 6$ et $r = 3$

2) $A_n^r = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = A_5^4$ $\quad \therefore n = 5$ et $r = 4$

3) $A_n^r = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = A_5^5$ $\quad \therefore n = 5$ et $r = 5$

4) $A_n^r = A_{120}^1$ $\quad \therefore n = 120$ et $r = 1$

Essayez de résoudre :

(8) Si $A_n^r = 210$, trouver les valeurs possibles de n et r.

(3) Combinaisons :

On sait que : pour tout $n \in \mathbb{Z}_+$, $r \in \mathbb{Z}_+$ et $n \geqslant r$, on a :

1) $C_n^r = \dfrac{C_n^r}{r!}$

2) $C_n^r = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$

3) $C_n^r = C_n^{n-r}$

4) Si $C_n^x = C_n^y$, alors $x = y$ ou $x + y = n$

Remarquez-que

$C_n^n = C_n^0 = 1$

$C_n^r \leqslant A_n^r$

$C_n^r \in \mathbb{Z}^+$

Exemple

(9) Trouver la valeur de n dans chacun des cas suivants :

a $C_n^{n-3} = 120$ **b** $C_{25}^{3n-5} = C_{25}^{2n}$

Solution

a $\because C_n^{n-3} = 120$ $\therefore C_n^3 = 120$ $\because 120 = C_{10}^3$

$\therefore C_n^3 = C_{10}^3$ $\therefore n = 10$

b $\because C_{25}^{3n-5} = C_{25}^{2n}$

1) soit $3n - 5 = 2n$ d'où $n = 5$ (vérifier le résultat)

2) ou $3n - 5 + 2n = 25$ d'où $n = 6$ (vérifier le résultat)

Essayez de résoudre :

(9) Trouver la valeur de n dans chacun des cas suivants :

a $C_{n+1}^{n-1} = 66$ **b** $C_{25}^{2n-14} = C_{25}^{n-1}$

Formule du rapport

$$\frac{C_n^r}{C_n^{r-1}} = \frac{n-r+1}{r}$$

Remarquez-que

(1) $\dfrac{C_{27}^{14}}{C_{27}^{13}} = \dfrac{27-13}{14} = 1$

(2) $\dfrac{C_{36}^{25}}{C_{36}^{23}} = \dfrac{C_{36}^{25}}{C_{36}^{24}} \times \dfrac{C_{36}^{24}}{C_{36}^{23}}$

Nous pouvons démontrer le résultat précédent comme suit :

Membre de gauche $= \dfrac{C_n^r}{C_n^{r-1}} = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!} \div \dfrac{n!}{(r-1)!\,(n-r+1)!}$

$= \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!} \times \dfrac{(r-1)!\,(n-r+1)!}{n!}$

$= \dfrac{1}{r\,(r-1)!\,(n-r)!} \times \dfrac{(r-1)!\,(n-r+1)\,(n-r)!}{1} = \dfrac{n-r+1}{r}$ = Membre de droite

Exemple

(10) Si $C_n^6 : C_n^5 = \dfrac{1}{3}$, trouver la valeur de $(n-2)!$

Solution

$\because \dfrac{C_n^6}{C_n^5} = \dfrac{1}{3}$ $\quad \therefore \dfrac{n - 6 + 1}{6} = \dfrac{1}{3}$ $\quad \therefore \dfrac{n - 5}{6} = \dfrac{1}{3}$ $\quad \therefore n = 7$

$\therefore (n - 2)! = (7 - 2)! = 5! = 120$

Essayez de résoudre :

(10) Si $C_7^r : C_7^{r-1} = \frac{1}{3}$, trouver la valeur de r.

Formule de l'addition

$$(2) \quad C_n^r + C_n^{r-1} = C_{n+1}^r$$

Nous pouvons démontrer le résultat précédent comme suit :

Membre de gauche $= \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!} + \dfrac{n!}{(r-1)!\,(n-r+1)!} = \dfrac{(n-r+1)\,n! + r(n!)}{r!\,(n-r+1)!} = \dfrac{(n-r+1+r)\,n!}{r!\,(n-r+1)!}$

$= \dfrac{(n+1)\,n!}{r!\,(n-r+1)!} = \dfrac{(n+1)\,!}{r!\,[(n+1)-r]!} = C_{n+1}^r$ = Membre de droite

Exemple

(11) Si $A_{n+1}^{r+1} : C_{n+1}^{r+1} = 720 : 1$ et $C_n^{r-2} + C_n^{r-3} = 56$, trouver la valeur numérique de n et r.

Solution

$A_{n+1}^{r+1} : C_{n+1}^{r+1} = 720 : 1$

$(r+1)! = 720 \quad (r+1)! = 6! \quad \therefore r = 5$

$\because C_n^{r-2} + C_n^{r-3} = 56 \quad \therefore C_n^3 + C_n^2 = 56 \quad \therefore C_{n+1}^3 = 56$

$\therefore C_{n+1}^3 = C_8^3 \quad \therefore n + 1 = 8 \quad \therefore n = 7$

Essayez de résoudre :

(11) Si $C_{13}^r : C_{13}^{r+1} = 9 : 5$, $C_n^{r-2} + C_n^{r-1} = 3432$, trouver la valeur numérique de n et r.

Exemple

(12) **Démontrer que** $C_n^r + 2C_n^{r+1} + C_n^{r+2} = C_{n+2}^{r+2}$.

Du résultat, déduire la valeur de $C_{10}^5 + 2C_{10}^6 + C_{10}^7$

Solution

Membre de gauche $= \left(C_n^r + C_n^{r+1}\right) + \left(C_n^{r+1} + C_n^{r+2}\right)$

$= C_{n+1}^{r+1} + C_{n+1}^{r+2} = C_{n+2}^{r+2}$ = Membre de droite

Pour trouver la valeur de $= C_{10}^5 + 2C_{10}^6 + C_{10}^7$, on pose n = 10, r = 5

D'après le résultat précédent, on a $C_{10}^5 + 2C_{10}^{5+1} + C_{10}^{5+2} = C_{10+2}^{5+2} = C_{12}^7 = 792$

Essayez de résoudre :

(12) a **Trouver la valeur de n qui vérifie** $C_2^3 + C_{2n}^2 + C_n^1 = 120$

b **Trouver la valeur de** $\dfrac{C_{17}^6 + C_{17}^5}{C_{18}^5}$

Réflexion critique : Démontrer que $C_n^r : C_{n-1}^{r-1} = \frac{n}{r}$ Du résultat, démontrer que $\frac{C_{25}^4 + C_{24}^3}{C_{24}^3 + C_{23}^2} = \frac{58}{9}$

Exemple

13 Si $C_n^{r+2} \times C_n^r \geqslant C_n^{r+1} \times C_n^{r-1}$, démontrer que $n \geqslant 2r + 1$

Solution

$\because C_n^{r+2} \times C_n^r \geqslant C_n^{r+1} \times C_n^{r-1}$ $\therefore \frac{C_n^{r+2}}{C_n^{r+1}} \times \frac{C_n^r}{C_n^{r-1}} \geqslant 1$

$\therefore \frac{n-(r+2)+1}{r+2} \times \frac{n-r+1}{r} \geqslant 1$ $\therefore (n-r-1)(n-r+1) \geqslant r(r+2)$

$\therefore (n-r)^2 \geqslant r^2 + 2r + 1$ $\therefore (n-r)^2 \geqslant (r+1)^2$ $\therefore n \geqslant 2r + 1$

Essayez de résoudre :

13 Trouver les valeurs possibles de n qui vérifient : $C_n^8 \times C_n^6 \geqslant C_n^7 \times C_n^5$

Exercices 1 - 1

[1] Choisir la bonne réponse parmi les réponses proposées :

1 Le nombre de façons de choisir deux ou trois lettres différentes parmi les lettres de l'ensemble {a ; b ; c ; d ; e ; f} est :

a $C_6^2 \times C_6^3$ b $A_6^2 \times A_6^3$ c $C_6^2 + C_6^3$ d $A_6^2 + A_6^3$

2 Si $C_n^5 : C_n^4 = 3 : 1$, alors la valeur de n est :

a 7 b 9 c 17 d 19

3 Si 12 nageurs participent à un concours de natation, alors le nombre de façons de classer les trois premiers gagnants est :

a 1230 b 1320 c 2310 d 3210

4 Laquelle des valeurs suivantes peut être le résultat de A_n^2 ?

a 24 b 25 c 27 d 30

5 Si $A_{17}^{m+5} = A_{29}^{m+5}$, alors la valeur de m est :

a -5 b 0 c 5 d 12

6 Si $A_{n-3}^7 = 8!$, alors la valeur de m est :

a 8 b 10 c 11 d 15

7 La valeur de $C_{50}^4 + \sum_{r=1}^{6} C_{56-r}^3$ est :

a C_{56}^4 b C_{56}^2 c C_{55}^4 d C_{55}^3

8 Un élève doit répondre à 10 questions parmi les 13 questions qui lui sont proposées à condition de répondre à au moins 4 questions parmi les 5 premières questions. Quel est le nombre de façons possibles pour répondre à ces questions ?

a 140 b 196 c 280 d 346

9. Si $C^4_{n+2} = n^2 - 1$, alors la valeur de n est :

a 2 b 4 c 6 d 10

[2] Répondre aux questions suivantes :

10. Quel est le nombre de façons de choisir un nombre pair et deux nombres impairs parmi 4 nombres pairs et 5 nombres impairs ?

11. Quel est le nombre de façons de choisir un nombre pair ou deux nombres impairs parmi 4 nombres pairs et 5 nombres impairs ?

12. Quel est le nombre de façons de distribuer 8 prix équitablement sur 4 étudiants ?

13. Combien de nombres formés de quatre chiffres peut-on former parmi les chiffres de l'ensemble {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7} ?

a avec remise. b sans remise.

14. Soit X = {2 ; 3 ; 4 ; 5}. A l'aide des éléments de X et sans répétition, combien de nombres peut-on former dans chacun des cas suivants ?

a si le nombre est formé de trois chiffres exactement.

b si le nombre est formé de trois chiffres au moins.

c si le nombre est formé de trois chiffres au plus.

15. Trouver la valeur de n et r dans chacun des cas suivants :

a $A^2_n = 2$, $A^2_{n+r} = 90$ b $A^4_n = 840$, $A^r_8 = 336$

c $A^2_n = 21$, $A^3_{n+r} = 990$ d $A^r_n = 10$ et $(n - r)! = 6$

16. Si $C^r_n : C^{r-1}_n = 2 : 3$, $C^n_{r-2} : C^n_{r-1} = 4 : 3$, trouver la valeur de n et r.

17. Démontrer que $\dfrac{C^r_n}{C^r_n + C^{r+1}_n} = \dfrac{r+1}{n+1}$ puis utiliser le résultat pour trouver la valeur de $\dfrac{C^6_{15} + C^7_{15}}{C^6_{15}}$

18. Démontrer que $C^r_n : C^r_{n-1} = \dfrac{n}{n-r}$ puis utiliser le résultat pour résoudre l'équation $\dfrac{C^8_n + C^8_{n-1}}{C^8_{n-1}} = 3$

19. Si $C^r_n = C^{r-1}_n$ et $C^r_{n+1} = \dfrac{40}{r!} \times A^{r-2}_n$, trouver la valeur de n et r.

20. Si $A^r_n = 120\ C^{n-r}_n$, trouver la valeur de C^{2r}_{12} puis trouver la plus petite valeur de n qui rend cette relation vraie.

21. Si $C^{r-1}_n : C^r_n : C^{r+1}_n = 1 : 5 : 15$, trouver la valeur de n et r.

22. Démontrer que $C^{r+1}_{n+1} \div C^r_n = \dfrac{n+1}{r+1}$ puis utiliser le résultat pour trouver la valeur de $\dfrac{C^5_{15} + C^4_{14}}{C^4_{14} + C^3_{13}}$

23 Si $\dfrac{C_{13}^{r} + C_{13}^{r+1}}{C_{13}^{r-1} + C_{13}^{3}} = 2$, trouver la valeur de r.

24 Si $A_{30}^{x} = A_{30}^{x+2y}$, trouver la valeur de x et y.

25 Si $A_n^8 \geqslant A_n^7$, quelle est la valeur de n ?

26 Si $(m + n)! = 380\,(m + n - 2)!$, trouver la valeur de (m + n).

27 Résoudre chacune des équations suivantes :

a $(n + 2)!\,(3n - 4)! = n!\,(3n - 2)!$

b $2\,(2n)! = (n^2 + 3n + 2)\,(n!)^2$

c $(2n)!\,(n - 3)! = 72\,(3n - 7)!$

28 Démontrer que $C_n^r : C_{n-1}^{r-1} = \frac{n}{r}$ puis utiliser le résultat pour trouver la valeur de n et r sachant que $C_{n+2}^{r+1} = 9C_{n+1}^{r} = 90C_n^{r-1}$

29 **Liens avec les suites :**

a Si $4 \times C_n^5$, $3 \times C_n^6$ et $3 \times C_n^7$ forment une suite arithmétique, trouver la valeur de n.

b Si $2C_{14}^{r+1}$, $3C_{14}^{r}$ et $6C_{14}^{r-1}$ forment une suite géométrique, trouver la valeur de r.

30 Trouver la valeur de n et r dans ce qui suit :

a $C_n^r : C_n^{r+1} : C_n^{r+2} = 1 : 2 : 3$

b $C_n^r : C_n^{r+2} : C_n^{r+1} = 15 : 28 : 24$

c $C_n^r : C_n^{r+2} : C_n^{r+4} = 3 : 14 : 14$

d $C_n^r : C_n^{r-1} = 9 : 5$, C_{15}^{r} et C_{15}^{3r-5}

e $C_{30}^{r} = C_{30}^{r+10}$ et $A_n^7 = 90 \times A_{n-2}^5$

31 On dispose de 4 points non alignés situés dans un même plan. Trouver le nombre de segments joignant deux points d'entre eux.

32 De combien de façons peut-on sélectionner trois personnes parmi cinq ?

33 De combien de façons peut-on constituer un groupe de quatre étudiants et deux étudiantes parmi vingt étudiants et dix étudiantes ?

34 De combien de façons peut-on constituer un groupe de sept membres parmi neuf filles et dix garçons de sorte que le groupe constitué contient uniquement trois garçons ?

35 De combien de façons peut-on constituer deux comités de trois personnes chacune parmi douze personnes de sorte qu'une personne choisie ne peut pas participer au deux comités simultanément ?

36 Trouver le nombre de triangles qu'on peut tracer ayants pour sommets trois des sommets d'un polygone dont le nombre de sommets est :

a 4 b 5 c 6

37 Trouver le nombre de diagonales d'un polygone dont le nombre de côtés est ;

a 6 b 8 c 12

38 Nous voulons constituer un comité de 4 personnes parmi 9 hommes et 3 femmes :

a Trouver le nombre de façons de former ce comité.

b Combien y a-t-il de comités contenant une seule femme ?

c Combien y a-t-il de comités contenant au moins une femme ?

Formule du binôme à une puissance entière positive

Unité (1)

1 - 2

Réfléchir et discuter

On sait que :

$(x + a)^1 = x + a$

$(x + a)^2 = x^2 + 2x\,a + a^2$

Nous pouvons trouver que :

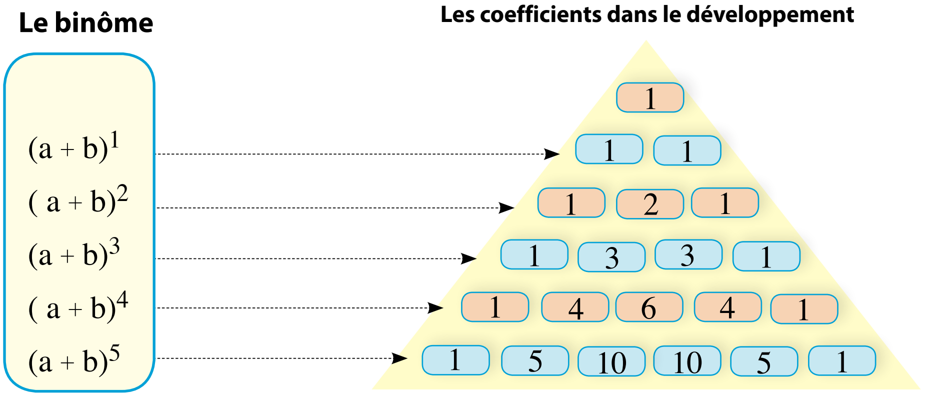
$(x + a)^3 = x^3 + 3x^2\,a + 3x\,a^2 + a^3$

$(x + a)^4 = x^4 + 4x^3\,a + 6x^2\,a^2 + 4x\,a^3 + a^4$

- Quelles est la relation entre le nombre de termes du développement et la valeur de la puissance ?
- Quelles est la relation entre les puissances des deux variables x et a dans chaque terme du développement ?
- Que peut-on remarquer concernant les coefficients des termes du développement ?
- Peut-on utiliser le triangle de Pascal pour exprimer ces coefficients ?
- Essayez de déduire une règle pour trouver le développement de $(a + b)^n$

Triangle de Pascal

On remarque que **les coefficients dans le développement suivent une règle représentée par le triangle de Pascal.**



- Nous pouvons écrire le triangle de Pascal en utilisant les combinaisons comme le montre la figure suivante :

A apprendre

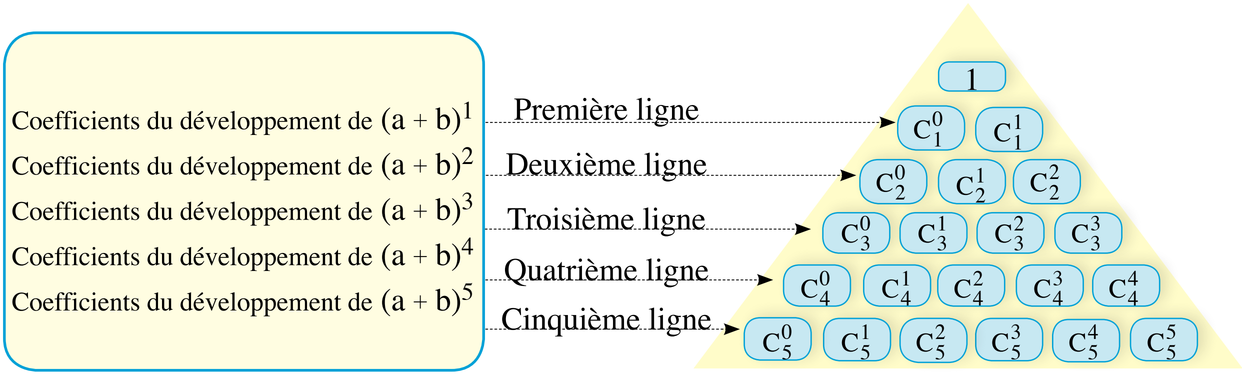
- *Lien ente le triangle de Pascal et les coefficients dans le développement d'un binôme*
- *La forme générale du développement de $(x + a)^n$ où $n \in \mathbb{Z}^+$*
- *Le terme général t_{r+1} dans le développement de $(x + a)^n$*
- *Le rang et la valeur du terme médian ou des deux termes médians.*

Expressions de base

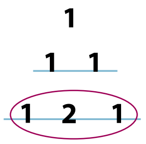
- *Développement*
- *Binôme*
- *Terme général*
- *Terme médian*

Matériel utilisé

- *Calculatrice scientifique*
- *Logiciels de graphisme*



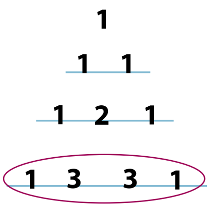
En observant la troisième ligne dans le triangle de Pascal, on trouve que 1 , 2 et 1 représentent C_2^0 , C_2^1 , C_2^2 respectivement et que C_2^0 , C_2^1 , C_2^2 représentent le nombre de sous ensembles qu'on peut former d'un ensemble contenant deux éléments. Ces sous ensembles sont tels que : $C_2^0 + C_2^1 + C_2^2 = 2^2 = 4$



Les sous-ensembles de l'ensemble {x ; y} sont ϕ , {x} , {y} et {x ; y}

De même, on a : La somme des éléments de la troisième ligne C_3^0, C_3^1 , C_3^2 , C_3^3 représentent les sous ensembles qu'on peut former d'un ensemble contenant trois éléments. Ces sous ensembles sont tels que :

$C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = 2^3$



D'une manière générale, si on dispose d'un ensemble dont le nombre d'éléments est n , alors le nombre de sous-ensembles qu'on peut obtenir de cet ensemble est $= 2^n$

On a $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$

Expression orale : À l'aide du triangle de Pascal

1) Trouver les coefficients de $(a+b)^6$ sous forme de combinaisons.

2) Trouver les coefficients de $(a+b)^5$ sous forme de combinaisons.

À apprendre

Développement d'un binôme

Si $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}^+$, alors :

1- $(x+a)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} a + C_n^2 x^{n-2} a^2 + ... + a^n$

2- $(x-a)^n = x^n - C_n^1 x^{n-1} a + C_n^2 x^{n-2} a^2 - ... + (-a^n)$

Remarques sur le développement de $(x+a)^n$

1) Le nombre de termes dans le développement est (n + 1) termes

2) Les termes dans le développement sont rangés selon les puissances décroissantes de x et selon les puissances croissantes de a .

3) Dans chaque terme, la sommes des puissances de x et de a est égale à n.

4) Le rang d'un terme quelconque dans le développement dépasse l'indice de C dans ce terme de 1.

Exemple **Écrire le développement d'un binôme**

1 Écrire le développement de $(2x + 3y)^4$

Solution

$$(2x + 3y)^4 = (2x)^4 + C_4^1(2x)^3(3y) + C_4^2(2x)^2(3y)^2 + C_4^3(2x)(3y)^3 + (3y)^4$$
$$= 16x^4 + 96x^3y + 216x^2y^2 + 216xy^3 + 81y^4$$

Essayez de résoudre :

1 Écrire le développement de :

a $(3x + y)^5$ b $(x^2 - 1)^6$

Cas particuliers du développement d'un binôme :

a $(1 + x)^n = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + x^n$

b $(1 - x)^n = 1 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - ... + (-x)^n$

مثال

2 Écrire le développement de $(1 + x)^6$, puis utiliser le résultat pour trouver la valeur de l'expression : $C_6^0 + C_6^1 + C_6^2 + ... + C_6^6$

Solution

$$(1 + x)^6 = 1 + C_6^1 x + C_6^2 x^2 + C_6^3 x^3 + C_6^4 x^4 + C_6^5 x^5 + x^6$$

En posant x = 1 dans les deux membres

$$(1 + 1)^6 = 1 + C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + ... + 1$$
$$2^6 = C_6^0 + C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + ... + C_6^6$$

Essayez de résoudre :

2 Écrire le développement de $(1 - x)^8$, puis utiliser le résultat pour trouver la valeur de l'expression: $1 - C_8^1 + C_8^2 - C_8^3 + ... + C_8^8$

Exemple

3 En utilisant la formule du binôme, trouver à un millième près, la valeur de $(1{,}01)^9$

Solution

$$(1{,}01)^9 = (1 + 0{,}01)^9$$
$$= 1 + C_9^1\left(\frac{1}{100}\right) + C_9^2\left(\frac{1}{100}\right)^2 + C_9^3\left(\frac{1}{100}\right)^3 + ...$$
$$= 1 + 0{,}09 + 0{,}0036 + 0{,}000084 + ... \text{ (des termes inférieurs } 0{,}001)$$
$$= 1{,}0936 \simeq 1{,}094$$

Essayez de résoudre :

3 En utilisant la formule du binôme, trouver à un millième près, la valeur de $(0{,}98)^{10}$.

Le terme général dans le développement d'un binôme.

Dans le développement de $(x + y)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} y + C_n^2 x^{n-2} y^2 + ... + y^n$

On remarque que $t_2 = C_n^1 x^{n-1} y^1$, $t_3 = C_n^2 x^{n-2} y^2$

De même, $t_9 = C_n^8 x^{n-8} y^8$

Si le terme général est t_{r+1} où $0 \leqslant r \leqslant n$, alors t_{r+1} peut s'écrire sous la forme :

$$t_{r+1} = C_n^r (x)^{n-r} (y)^r$$

Exemple

4 Trouver le sixième terme dans le développement de $(x + \frac{2}{x})^8$

Solution

$t_6 = C_8^5 (x)^3 (\frac{2}{x})^5 = C_8^5 \times 2^5 x^{-2} = 1792 x^{-2}$

Le coefficient de ce terme est = 1792

On remarque que $t_{r+1} = C_n^r$ (Le coefficient du premier terme $)^{n-r}$ (Le coefficient du deuxième terme$)^r$

Essayez de résoudre :

4 Dans le développement de $(2x^2 + \frac{1}{2})^7$, trouver t_3 et t_7 selon les puissances décroissantes de x et si $t_3 = t_7$, trouver la valeur de x.

Exemple

5 Trouver le dixième terme dans l'ordre inverse du développement de $(3x^2 - \frac{1}{2x})^{13}$.

Solution

Le dixième terme dans l'ordre inverse dans le développement de $(3x^2 - \frac{1}{2x})^{13}$ est le même que le dixième terme dans l'ordre dans le développement de $(\frac{-1}{2x} + 3x^2)^{13}$

$t_{10} = C_{13}^9 (\frac{-1}{2x})^4 (3x^2)^9 = \frac{715 \times 3^9}{2^4} x^{14}$

Autre solution :

Nous pouvons calculer le dixième terme dans l'ordre inverse du développement de

$(3x^2 - \frac{1}{2x})^{13}$,

Son rang = 14 - 10 + 1 = 5

t_{10} dans l'ordre inverse = t_5 dans l'ordre $= C_{13}^4 (3x^2)^9 (\frac{-1}{2x})^4 = \frac{715 \times 3^9}{2^4} x^{14}$

Essayez de résoudre :

5 Trouver le quatrième terme dans l'ordre inverse du développement de $(2x - \frac{1}{3x^2})^{11}$

Règles

1) $(x + a)^n + (x - a)^n = 2 (t_1 + t_3 + t_5 + ...)$ **2)** $(x + a)^n - (x - a)^n = 2 (t_2 + t_4 + t_6 + ...)$

Exemple

6 Développer $(x + 2)^6 + (x - 2)^6$

Solution

$(x + 2)^6 + (x - 2)^6 = 2\,(t_1 + t_3 + t_5 + t_7)$

$= 2\,(x^6 + C_6^2 x^4 \times 2^2 + C_6^4 x^2 \times 2^4 + 2^6) = 2\,(x^6 + 60x^4 + 240\,x^2 + 64)$

Essayez de résoudre :

6 Développer $(1 + \sqrt{x})^5 - (1 - \sqrt{x})^5$

2) En utilisant la formule du binôme, trouver à un millième près, la valeur de $(1{,}03)^8 + (0{,}97)^8$

Exemple

7 Trouver le cinquième terme dans le développement de :

$(3 + x)^{11} - C_{11}^1\,(3 + x)^{10}\,(1 - 2x) + C_{11}^2\,(3 + x)^9\,(1 - 2x)^2 - \ldots\ldots\ldots - (1 - 2x)^{11}$

Solution

L'expression représente le développement de $[(3 + x) - (1 - 2x)]^{11} = (2 + 3x)^{11}$

Donc $t_5 = C_{11}^4\,(2)^7\,(3x)^4 = 330 \times 2^7 \times 3^4\,x^4 = 3421440\,x^4$

Essayez de résoudre :

7 Dans le développement de $(1 - x)^8 + 24\,x\,(1 - x)^7 + 252\,x^2\,(1 - x)^6 + \ldots\ldots\ldots + 6561x^8$, trouver la valeur numérique du sixième terme pour $x = 1$

Exemple

8 Si $(1 + cx)^n = 1 + 20c + a_1 C_2^1 + a_2 C_3^2 + \ldots\ldots\ldots + a_{n-1}\,C_n^{n-1}$

et si $16\,a_1 = 3\,a_2$, trouver la valeur de n et c où $c \neq 0$

Solution

$(1 + cx)^n = 1 + C_n^1\,cx + C_n^2\,c^2\,x^2 + C_n^3\,c^3\,x^3 + \ldots\ldots\ldots$

$\therefore C_n^1\,c = 20$ $\quad \therefore n\,c = 20$ $\quad \therefore c = \dfrac{20}{n}$ ①

$\because 16 \times C_n^2\,c^2 = 3 \times C_n^3\,c^3$ $\quad \therefore 16 \times C_n^2 = 3 \times C_n^3\,c$ ②

De ① et ② $\quad \therefore 16 \times C_n^2 = 3 \times C_n^3 \times \dfrac{20}{n}$

$\therefore 16\,n = 3 \times \dfrac{C_n^3}{C_n^2} \times 20$ $\quad \therefore 16n = \cancel{3} \times \dfrac{n-2}{\cancel{3}} \times 20$ $\quad \therefore n = 10$

En ① $\quad \therefore c = \dfrac{20}{10} = 2$

Essayez de résoudre :

8 Dans le développement de $(1 + cx)^{10}$, si le troisième terme est égal à 180 et le cinquième terme est égal à 210, trouver la valeur de c et x où c est un nombre entier positif.

Exemple

9 Trouver le coefficient de x^{10} dans le développement de $(1 + x - x^2)^9$

Solution

Dans le développement de $(1 + (x - x^2))^9$

$\because\ t_{r+1} = C_9^r \times (x - x^2)^r$ $\quad\therefore\ t_{r+1} = C_9^r \times x^r \times (1 - x)^r$

$\therefore\ t_{r+1} = C_9^r\ (x^r) \times C_r^m (-x)^m$ $\quad\therefore\ t_{r+1} = (-1)^m \times C_9^r \times C_r^m \times x^{m+r}$

$\therefore\ x^{10} = x^{m+r}$ $\quad\therefore\ m + r = 10$ où $< 10\ r \geqslant m$

r = 5	r = 6	r = 7	r = 8	r = 9
m = 5	m = 4	m = 3	m = 2	m = 1

Le coefficient de $x^{10} = -C_9^5 \times C_5^5 + C_9^6 \times C_6^4 - C_9^7 \times C_7^3 + C_9^8 \times C_8^2 - C_9^9 \times C_9^1$

$\therefore$ Le coefficient de $x^{10} = -126 + 1260 - 1260 + 252 - 9 = 117$

Essayez de résoudre :

9 Trouver le coefficient de x^2 dans le développement de $(1 + x + x^2)^5$

Exemple

10 **a** Démontrer que $= \dfrac{C_n^r}{C_{n-1}^{r-1}} = \dfrac{n}{r}$

b Si le rapport entre t_6 dans le développement de $(x + \frac{1}{x})^{15}$ et t_5 dans le développement de $(x - \frac{1}{x^2})^{14}$ est égal à $\frac{8}{9}$, trouver la valeur de x.

Solution

a $C_n^r \div C_{n-1}^{r-1} = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!} \times \dfrac{(n-r)!\,(n-1-r+1)!}{(n-1)!} = \dfrac{n\,(n-r)!\ (r-1)!}{r\,(r-1)!\,(n-r)!} = \dfrac{n}{r}$

$$= \frac{t_6 \text{ dans } (x + \frac{1}{x})^{15}}{t_5 \text{ dans } (x - \frac{1}{x^2})^{14}} = \frac{C_{15}^5\ x^{10}\,(\frac{1}{x})^5}{C_{14}^4\ x^{10}\,(\frac{-1}{x^2})^4} = \frac{8}{9}$$

$\therefore\ 3x^3 = \frac{8}{9}$ $\quad\therefore\ x^3 = \frac{8}{27}$ $\quad\therefore\ x = \frac{2}{3}$

Essayez de résoudre :

10 En utilisant la formule du binôme, démontrer que $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + ... + (C_n^2)^2 = C_{2n}^n$

Terme médian dans le développement de $(x + a)^n$

Dans le développement de $(x + a)^n$, on trouve que le nombre de termes = n + 1

(1) Si n est un nombre pair, le nombre de termes du développement est un nombre impair. Par conséquent, le développement admet un terme médian unique de rang $\frac{n+2}{2}$

(2) Si n est un nombre impair, le nombre de termes du développement est un nombre pair. Par conséquent, le développement admet deux termes médians de rangs $\frac{n+1}{2}$ et $\frac{n+3}{2}$

Exemple

11 Trouver le terme médian dans le développement de $(2x + \frac{1}{2x^2})^{12}$

Solution

Le rang du terme médian $= \frac{12+2}{2} = 7$

$$t_7 = C_{12}^6\ (2x)^6\left(\frac{1}{2x^2}\right)^6 = C_{12}^6\ (2)^6\ (\tfrac{1}{2})^6\ x^{6-12} = C_{12}^6\ x^{-6}$$

Essayez de résoudre :

11 Trouver le terme médian dans le développement de $(x^2 + \frac{1}{2x})^{10}$, Si la valeur de ce terme est égale à $= \frac{28}{27}$ trouver la valeur de x

Exemple

12 Trouver les deux termes médians dans le développement de $(\frac{x^2}{3} + \frac{3}{x})^{15}$

Solution

Les deux termes médians sont t_8 et t_9

$$t_8 = C_{15}^7\left(\frac{x^2}{3}\right)^8\left(\frac{3}{x}\right)^7 = C_{15}^7 \times 3^{-8+7} \times x^{16-7} = C_{15}^7 \times \frac{1}{3}x^9$$

$$t_9 = C_{15}^8\left(\frac{x^2}{3}\right)^7\left(\frac{3}{x}\right)^8 = C_{15}^8 \times 3^{8-7} \times s^{14-8} = C_{15}^8 \times 3x^6$$

Essayez de résoudre :

12 Si les deux termes médians dans le développement de $(3x + 2y)^{13}$ sont égaux, démontrer que $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$

Exemple

13 Trouver les deux termes médians dans le développement de $(3 + 2y)^8 + (3 - 2x)^8$

Solution

Le rang du terme médian $= \frac{8}{2} + 1 = 5$

$$t_5 = C_8^4\ (3)^4\,(2x)^4 + C_8^4 (3)^4\,(-2x)^4$$

$$= 2 \times C_8^4\ (3)^4\,(2x)^4 = 181440\ x^4$$

Essayez de résoudre :

13 Trouver les deux termes médians dans le développement de $\left(2\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^{10} + \left(2\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^{10}$

Exercices 2 - 1

[1] Choisir la bonne réponse parmi les réponses proposées :

1 Si les deux termes médians dans le développement de $(x + y)^n$ sont t_7 et t_8, alors n est égale à:

a 13 b 15 c 16 d 56

2 Si $1 + 5x + \frac{5 \times 4}{2 \times 1} x^2 + \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} x^3 + \dots + x^5 = 1024$, alors x est égale à :

a 1 b 2 c 10 d 3

3 La somme des coefficients des termes dans le développement de $(x^2 - \frac{1}{x})^7$ est égale à :

a 2^7 b 2^5 c 2^6 d 0

4 Le coefficients du cinquième terme dans le développement de $(1 + 2x)^{10}$ est égal à :

a $16\ C_{10}^5$ b $\frac{1}{16} C_{10}^5$ c $16 C_{10}^4$ d $\frac{1}{16} C_{10}^4$

5 Dans le développement d'un binôme, si le terme général est $C_{12}^r\ x^{24 - 4r}$, alors le terme contenant x^{12} est :

a t_3 b t_4 c t_5 d n'existe pas

6 Si les deux termes médians dans le développement de $(a + 2b)^{2n + 1}$ sont égaux, alors :

a $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$ b $a = 4b$ c $a = 8b$ d $a = 2b$

7 Si le neuvième terme dans le développement de $(\frac{2a}{3} + \frac{b}{a^2})^{8n}$ est le terme médian, alors n est égale à :

a 1 b 2 c 3 d 4

8 Dans le développement de $(1 + bx)^9$, le coefficient du sixième terme est égal à :

a C_9^5 b C_9^6 c $C_9^5\ b^5$ d $C_9^6\ b^6$

9 Si le développement d'un binôme contient 7 termes positifs et 6 termes négatifs, alors le binôme peut-être sous la forme :

a $(a - b)^{12}$ b $(a - b)^{13}$ c $(a + b)^{12}$ d $(a + b)^{13}$

[2] Répondre aux questions suivantes :

10 Si $1 + 8x + C_8^2\, x^2 + \dots + x^8 = 256$ trouver la valeur de x

11 En utilisant la formule du binôme, trouver à un millième près la valeur de :
a $(1{,}003)^5$ b $(0{,}998)^7$ c $(1{,}01)^6 + (00{,}99)^6$ d $(1{,}02)^8 - (0{,}98)^8$

12 Trouver la valeur de x qui vérifie $(1 + \sqrt{3})^6 - (1 - \sqrt{3})6 = 480\sqrt{3}\,x$

13 En utilisant le développement de : $(1 + x)^{10} = 1 + C_{10}^1\, x + C_{10}^2\, x^2 + \dots + x^{10}$, démontrer que :

a $1 + C_{10}^1 + C_{10}^2 + \dots + C_{10}^{10} = 2^{10}$ b $1 - C_{10}^1 + C_{10}^2 - \dots + C_{10}^{10} = 0$

14 Développer ce qui suit :
a $(\frac{2}{x} + \frac{x}{2})^4$ b $(x - \frac{1}{x})5$
c $(x + \sqrt{2})^4 + (x - \sqrt{2})^4$ d $(\sqrt{3} + 2x)^5 - (\sqrt{3} - 2x)^5$

15 Dans le développement de $(1 + x)^n$ selon les puissances décroissantes de x, si $t_3 = 28x^2$ et $t_5 = 1120$ trouver la valeur de n et x.

16 Dans le développement de $(1 + x)^n$ si le coefficient du sixième terme est égal au coefficient du dixième terme, trouver la valeur de n.

17 Dans le développement de $(ax + b)^{10}$ selon les puissances décroissantes de x si le coefficient de $t_6 = \frac{63}{8}$ démontrer que $2ab = 1$

18 Dans le développement de $(2x^2 + \frac{1}{2x})^{12}$ trouver le terme médian.

19 Dans le développement de $(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{x})^{11}$, trouver les deux termes médians.

20 Dans le développement de $x^4\,(x - \frac{1}{x})^9$ selon les puissances décroissantes de x, trouver le quatrième terme dans l'ordre inverse.

21 Si le terme médian dans le développement de $(x^2 + \frac{1}{2x})^{10}$ est égal à $\frac{28}{27}$ trouver le valeur de x.

22 Trouver le rapport entre le terme médian et le cinquième terme dans le développement de $(\frac{2x}{3} + \frac{3}{2x})^{10}$, puis trouver la valeur numérique de ce rapport pour $x = 3$

23 Si le rapport entre le cinquième terme dans le développement de $(x + \frac{1}{x})^{15}$ et le quatrième terme dans le développement de $(x - \frac{1}{x^2})^{14}$ est égal à -16 : 15 , trouver la valeur de x

Unité (1)

1 - 3 Trouver le terme contenant x^k dans le développent d'un binôme

A apprendre

- *Utiliser le terme général pour trouver le terme contenant x^k dans le développement d'un binôme.*
- *Trouver le coefficient du terme contenant x^k dans le développement.*
- *Trouver le coefficient de la plus grande puissance de x.*

Expressions de base

- *Terme général*
- *Terme constant*
- *La plus grande puissance*
- *Coefficient d'un terme*

Materials

- *Calculatrice scientifique*

Réfléchir et discuter

De la leçon précédente, nous avons appris que :

$$(x^2 - \frac{1}{2x})^{20} = (x^2)^{20} - C_{20}^1 (x^2)^{19} (\frac{1}{2x}) + C_{20}^2 (x^2)^{18} (\frac{1}{2} x)^2 - C_{20}^3 (x^2)^{17} (\frac{1}{2x})^3 + \dots + (\frac{-1}{2x})^{20}$$

Est-il possible de trouver le terme contenant x^{16} ou x^{24} dans le développement ou le terme constant sans écrire tous les termes du développement ?

La méthode qui consiste à trouver le terme contenant x^k en développant le binôme est très difficile. Pour cela, on suit la méthode suivante :

1- On suppose que le terme cherché est le terme général t_{r+1} puis on calcule ce terme en fonction de r.

2- On calcule la somme des puissances de x dans le terme général en fonction de r puis on égalise le résultat à la puissance cherchée k. De cette égalité, on calcule la valeur de r . Deux cas se présentent :

a $r \in \mathbb{N}$ et par conséquent , r + 1 est le rang du terme demandé.

b $r \notin \mathbb{N}$ et par conséquent, le terme demandé n'existe pas.

Pour chercher le terme constant dans le développement, on égalise la somme des puissances de x dans le terme général à 0.

Exemple

1 Dans le développement $(\frac{3x}{2} + \frac{2}{3x})^{11}$, trouver le coefficient de x.

Solution

$$t_{r+1} = C_{11}^r \left(\frac{3x}{2}\right)^{11-r} \left(\frac{2}{3x}\right)^r$$

En comparant les puissances dans $x^{11-r-r} = x^1$

$11 - 2r = 1 \qquad r = 5$

Le terme demandé est le sixième terme.

Le coefficient de $t_6 = C_{11}^5 \left(\frac{3}{2}\right)^6 \left(\frac{2}{3}\right)^5 = 693$

Essayez de résoudre :

1 Trouver le coefficient de x^8 dans le développement $\left(\frac{2x}{3} - \frac{3}{x}\right)^{12}$

Exemple

2 Dans le développement $\left(2x - \frac{1}{2x^2}\right)^9$ trouver :

a le coefficient de x^3

b le terme constant

c Démontrer que le développement ne contient pas de terme contenant x^2

Solution

$t_{r+1} = C_9^r\ (2x)^{9-r}\left(\frac{-1}{2x^2}\right)^r = C_9^r\ (-1)^r\ (2)^{9-2r}\ x^{9-3r}$

En comparant les puissances :

a Pour trouver le coefficient de x^3

$x^{9-3r} = x^3$ $\quad$ $9 - 3r = 3$ $\quad$ $r = 2$

$\therefore$ Le troisième terme contient x^3

Le coefficient de $t_3 = C_9^2 \times 2^5 = 36 \times 25 = 900$

b Pour trouver le terme constant $\quad$ $9 - 3r = 0$ $\quad$ $r = 3$

$\therefore$ Le terme demandé est $t_4 = C_9^3\ (-1)^3\ (2)^3 = -672$

c En posant $9 - 3r = 2$ $\quad$ $\therefore 3r = 7$ $\quad$ $\therefore r = \frac{7}{3} \notin \mathbb{N}$

$\therefore$ Le développement ne contient pas de terme contenant x^2

Essayez de résoudre :

2 a Trouver le terme constant dans le développement $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^{12}$

b Trouver le coefficient de x^{-10} dans le développement $\left(\frac{x^2}{3} - \frac{2}{x^2}\right)^{15}$

c Dans le développement $\left(ax + \frac{1}{bx}\right)^{10}$ selon les puissances décroissantes de x, si le terme constant est égal au coefficient du septième terme, démontrer que $6\ ab = 5$

Exemple

3 Si n est un nombre entier positif, démontrer qu'il n'existe un terme constant dans le développement $\left(x^5 + \frac{1}{x^2}\right)^n$ que si n est un multiple de 7. Trouver ensuite ce terme pour n = 7

Solution

$t_{r+1} = C_n^r\ (x^5)^{n-r}\left(\frac{1}{x^2}\right)^r = C_n^r\ x^{5n-7r}$

$x^{5n-7r} = x^0$ $\quad$ $5n - 7r = 0$ $\quad$ $r = \frac{5n}{7}$

$\frac{5n}{7} \in \mathbb{Z}^+$ si n est un multiple de n 7 $\quad$ si $n = 7$ $\quad$ $r = 5$ $\quad$ et le terme demandé est t6

$t_6 = C_7^5 = 21$

Essayez de résoudre :

(3) Dans le développement $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{3n}$, trouver :

a) le coefficient du terme contenant x^{3n}

b) Si n est égal à 6, trouver le rapport entre le terme contenant x^{3n} et le coefficient du terme médian

Exemple

(4) Dans le développement $\left(2 + \frac{x}{3}\right)^9$ trouver la valeur de x qui rend les deux termes médians égaux.

Solution

Les deux termes médians sont t_5 , t_6

$\because t_5 = t_6$ $\quad\quad\therefore C_9^4 \,(2)^5 \left(\frac{x}{3}\right)^4 = C_9^5 (2)^4 \left(\frac{x}{3}\right)^5$

$2 = \frac{x}{3}$ $\quad\quad\therefore x = 6$

Essayez de résoudre :

(4) Trouver le coefficient du terme médian dans le développement de $(1 + 3x + 3x^2 + x^3)^4$

Exercices 3 - 1

[1] Choisir la bonne réponse parmi les réponses proposées :

(1) Le terme contenant x^4 dans le développement de $(1 + 2x)^{10}$ est égal à :

a) C_{15}^4 b) $\frac{1}{16} C_{10}^4$ c) $16\, C_{10}^4$ d) $32 \times C_{10}^5$

(2) Dans le développement de $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{10}$, le terme constant est :

a) t_4 b) t_5 c) t_6 d) n'existe pas

(3) Dans le développement de $x^3\,(1 + x)^7$ le coefficient du terme contenant x^4 est :

a) C_7^4 b) C_7^3 c) C_7^1 d) 21

(4) Dans le développement de $\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^6$ le terme constant est le

a) troisième terme b) quatrième terme c) cinquième terme d) n'existe pas

(5) Dans le développement de $\left(ax^2 + \frac{1}{x}\right)^{11}$ si les coefficients de x^4 et x^7 sont égaux, alors a est égale à :

a) 1 b) -1 c) ± 1 d) ± 2

(6) Si t_7 est le terme constant dans le développement de $\left(x + \frac{1}{x}\right)^n$, alors n est égale à :

a) 6 b) 10 c) 12 d) 8

7 Si le coefficient du terme médian dans le développement de $\left(x^2 + \frac{1}{ax}\right)^8$ est égal au coefficient de x^7 alors a est égale à :

a $\frac{4}{5}$ b $\frac{-4}{5}$ c $\frac{-5}{4}$ d $\frac{5}{4}$

8 Dans le développement de $\left(ax + \frac{1}{bx}\right)^{10}$ selon les puissances décroissantes de x , si le terme constant est égal au coefficient du septième terme, alors :

a $ab = \frac{6}{5}$ b $ab = \frac{5}{6}$ c $ab = \frac{36}{25}$ d $ab = \frac{25}{36}$

9 Dans le développement de $\left(2x + \frac{1}{2x}\right)^8$ le terme constant est égal à :

a 35 b 140 c 70 d 56

10 Dans le développement de $(1 + ax)^7$ selon les puissances croissantes de x, si le coefficient de $t_5 = 560$ alors a est égale à :

a 2 b 4 c ± 2 d ± 4

[2] Répondre aux questions suivantes :

11 Dans le développement de $\left(4x^2 + \frac{1}{2x}\right)^{12}$, calculer le terme constant

12 Trouver le coefficient de x^{12} dans le développement de $x^2\left(\frac{x^2}{2} + \frac{2}{x^3}\right)^{15}$

13 Si le sixième terme dans le développement de $\left(2x - \frac{1}{x^3}\right)^n$ est constant, trouver la valeur de n puis étudier l'existence du terme contenant x^{-6} dans le développement.

14 Dans le développement de $\left(2x - \frac{1}{x^2}\right)^9$, trouver :

a le coefficient de x^3 b le terme constant

c Démontrer qu'il n'existe pas de terme contenant x^2 dans le développement.

15 Démontrer que $C_n^r : C_{n-1}^{r-1} = \frac{n}{r}$ Si le rapport entre le coefficient de t_{11} dans le développement de $(1 + x^2)^n$ et celui de t_{10} dans le développement de $(1 - y)^{n-1}$ est égal à 2 : 3 , trouver la valeur de n.

16 Trouver le coefficient de $\left(\frac{x}{y}\right)^4$ dans le développement de $\left(\frac{2x}{y} + \frac{y}{2x}\right)^{10}$

17 Trouver le coefficient de x^n dans le développement de $(1 + x)^{2n}$, puis démontrer qu'il est égal au double du coefficient de x^n dans le développement de $(1 + x)^{2n-1}$

18 Dans le développement de $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{2n}$, démontrer que le terme constant est le terme médian puis trouver la valeur de ce terme pour n = 8

19 Dans le développement de $\left(x^k + \frac{1}{x}\right)^6$ où k est un nombre entier positif, trouver :

a la valeur de k qui permet d'avoir un terme constant dans le développement.

b le rapport entre le terme constant et le coefficient du terme médian pour la plus grande valeur obtenue de k .

20 Dans le développement de $\left(x^2 + \frac{1}{ax}\right)^{12}$ si le rapport entre le terme constant et le coefficient du terme contenant x^3 est égal à 5 : 16 ,trouver la valeur de a puis trouver la valeur du terme médian pour x = 2

21 Dans le développement de $\left(2x^2 + \frac{a}{x^3}\right)^{10}$, si le coefficient du terme contenant x^5 est égal au coefficient du terme contenant x^{15} , trouver la valeur de a.

22 Dans le développement de $\left(x^2 + \frac{1}{8x}\right)^{13}$ selon les puissances décroissantes de x :

a démontrer qu'il n'existe pas de termes constant.

b si $t_4 = t_{11}$, trouver la valeur de x

23 Dans le développement de $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^9$, trouver :

a le rang et la valeur du terme constant.

b la valeur de x qui rend la somme des deux termes médians nulle.

24 Trouver le terme constant dans le développement de $\left(9x^2 + \frac{1}{3x}\right)^9$, puis trouver la valeur de x qui rend les coefficients des deux termes médians égaux.

25 Dans le développement de $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{3n}$ démontrer que le terme constant est égal au coefficient du terme contenant x^{3n}, et si n = 6 , trouver le rapport entre le terme contenant x^{3n} et le terme médian.

Rapport entre deux termes consécutifs dans le développement d'un binôme

Unité (1)

1 - 4

Dans le développement de $(x + a)^n$, si les deux termes consécutifs sont t_{r+1} et t_r

$$\frac{t_{r+1}}{t_r} = \frac{C_n^r\,(x)^{n-r}\,(a)^r}{C_n^{r-1}\,(x)^{n-r+1}(a)^{r-1}}$$

$$= \frac{C_n^r}{C_n^{r-1}} \times \frac{a}{x}$$

$$\boxed{\frac{t_{r+1}}{t_r} = \frac{n-r+1}{r} \times \frac{a}{x}}$$

De même, on a : $\dfrac{\text{le coefficient de } t_{r+1}}{\text{le coefficient de } t_r} = \dfrac{n-r+1}{r} \times \dfrac{\text{le coefficient de a}}{\text{le coefficient de x}}$

Exemple

1 Dans le développement $(3 + 2y)^{12}$, trouver :

a $\dfrac{t_3}{t_2}$

b $\dfrac{\text{le coefficient de } t_7}{\text{le coefficient de } t_8}$

c $\dfrac{t_6}{t_4}$

d $\dfrac{\text{le coefficient de } t_8}{\text{le coefficient de } t_6}$

Solution

a $\dfrac{t_3}{t_2} = \dfrac{12-2+1}{2} \times \left(\dfrac{2y}{x}\right) = \dfrac{11}{2} \times \dfrac{2y}{x} = \dfrac{11y}{x}$

b $\dfrac{\text{le coefficient de } t_7}{\text{le coefficient de } t_8} = \dfrac{7}{12-7+1} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{7}{12}$

c $\dfrac{t_6}{t_4} = \dfrac{t_6}{t_5} \times \dfrac{t_5}{t_4}$

$= \dfrac{12-5+1}{5} \times \left(\dfrac{2y}{x}\right) \times \dfrac{12-4+1}{4} \left(\dfrac{2y}{x}\right)$

$= \dfrac{8}{5} \times \dfrac{2y}{x} \times \dfrac{9}{4} \times \dfrac{2y}{x} = \dfrac{72\,y^2}{5\,x^2}$

d $\dfrac{\text{le coefficient de } t_8}{\text{le coefficient de } t_6} = \dfrac{\text{le coefficient de } t_8}{\text{le coefficient de } t_7} \times \dfrac{\text{le coefficient de } t_7}{\text{le coefficient de } t_6}$

$= \dfrac{12-7+1}{7} \times \dfrac{2}{1} \times \dfrac{12-6+1}{6} \times \dfrac{2}{1}$

$= \dfrac{6}{7} \times \dfrac{2}{1} \times \dfrac{7}{6} \times \dfrac{2}{1} = 4$

A apprendre

- *Trouver le rapport entre deux termes consécutifs*
- *Trouver le rapport entre les coefficients de deux termes consécutifs*

Expressions de base

- *Deux termes consécutifs*

Matériel utilisé

- *Calculatrice scientifique*

Essayez de résoudre :

1 Dans le développement $\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^8$

a trouver le rapport entre le cinquième terme et le sixième terme et si ce rapport est égal à 8 : 25 , trouver la valeur de x.

b démontrer que ce développement ne contient pas de terme constant.

Exemple

2 Dans le développement $(x + y)^8$ si $2\,t_5 = t_4 + t_6$, trouver la valeur numérique de $\frac{x}{y}$

Solution

$t_4 + t_6 = 2t_5$ En divisant les deux membres par t_5 $\qquad \frac{t_4}{t_5} + \frac{t_6}{t_5} = 2$

$\frac{4}{8-4+1}\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{8-5+1}{5}\left(\frac{x}{y}\right) = 2 \qquad \frac{4x}{5y} + \frac{4y}{5x} = \frac{2}{1}$ **En multipliant par** $5xy$

$4x^2 + 4y^2 = 10\,xy \qquad 4x^2 - 10\,xy + 4y^2 = 0 \div 2$

$2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0 \qquad (2x - y)(x - 2y) = 0$

$2x = y \qquad x = 2y$

$\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$ ou $\frac{x}{y} = \frac{2}{1}$

Essayez de résoudre :

2 Dans le développement $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^8$, si t_4 , t_5 , $25t_7$ et t_6 sont proportionnels, trouver la valeur de x.

Exemple

3 Dans le développement $(1 + x)^n$, si les coefficients de trois termes consécutifs selon les puissances croissantes de x sont 35, 21 et 7, trouver la valeur de n et les rangs des trois termes.

Solution

Soient les trois termes t_r , t_{r+1} et t_{r+2}

$\frac{\text{le coefficient de } t_{r+1}}{\text{le coefficient de } t_r} = \frac{n-r+1}{r} = \frac{21}{35} \qquad \frac{n-r+1}{r} = \frac{3}{5}$

$5n - 5r + 5 = 3r \qquad \boxed{5n - 8r = -5} \qquad (1)$

$\frac{\text{le coefficient de } t_{r+2}}{\text{le coefficient de } t_{r+1}} = \frac{n-(r+1)+1}{r+1} = \frac{7}{21} \qquad \frac{n-r}{r+1} = \frac{1}{3}$

$3n - 3r = r + 1 \qquad \boxed{3n - 4r = 1} \qquad (2)$

En résolvant les deux équations : (1) , (2) $\quad \therefore\ n = 7$ et $r = 5$

Essayez de résoudre :

3 Dans le développement $(x + y)^n$, si trois termes consécutifs sont 112 , 448 et 1120 , trouver la valeur de n , x et y.

Exemple **Trouver le plus grand terme**

4 Trouver le plus grand coefficient dans le développement $(2x+3y)^{10}$

Solution

$\because \dfrac{t_{r+1}}{t_r} = \dfrac{10+1-r}{r} \times \dfrac{3}{2}$ $\therefore \dfrac{t_{r+1}}{t_r} = \dfrac{11-r}{r} \times \dfrac{3}{2} = \dfrac{33-3r}{2r}$

a Si $\dfrac{33-3r}{2r} \geqslant 1$ $\therefore 33-3r \geqslant 2r$ $\therefore 5r \leqslant 33$ $\therefore r \leqslant 6{,}6$

d'où on déduit que $t_7 > t_6 > t_5 > \dots > t_1$

b $\dfrac{33-3r}{2r} \leqslant 1$ $\therefore 33-3r \leqslant 2r$ $\therefore 5r \geqslant 33$ $\therefore r \geqslant 6{,}6$

d'où on déduit que $t_{11} < t_{10} < t_9 < t_8 < t_7$

$\therefore t_7$ est le plus grand terme dans le développement de $(2x+3y)^{10}$

$\therefore$ Le coefficient de $t_7 = C_{10}^{6} \times 2^4 \times 3^6$ $\therefore$ Le coefficient de $t_7 = 2449440$

Exercices 1 - 4

[1] Choisir la bonne réponse parmi les réponses proposées :

1 Dans le développement de $(x+y)^{10}$, le neuvième terme : le huitième terme est égal à ....

a $\dfrac{3y}{8x}$ b $\dfrac{3x}{8y}$ c $\dfrac{8y}{3x}$ d $\dfrac{8x}{3y}$

2 Dans le développement de $(1-x)^{12}$, le coefficient du sixième terme : le coefficient du cinquième terme ....

a $(\dfrac{8}{5})$ b $\dfrac{5}{8}$ c $\dfrac{-8}{5}$ d $\dfrac{-5}{8}$

3 Dans le développement de $(x+y)^8$, $\dfrac{t_6}{t_4}$ est égal à ....

a $\dfrac{25\,y^2}{16\,x^2}$ b $\dfrac{25x^2}{16\,y^2}$ c 1 d $\dfrac{y^2}{x^2}$

4 Dans le développement de $(3a-2b)^{11}$, si le rapport entre les deux termes médians dans l'ordre est égal à $\dfrac{-3}{2}$ alors a : b est égal à ....

a 9 : 4 b 4 : 9 c 1 d -1

[2] Répondre aux questions suivantes :

5 Dans le développement de $\left(2x^2 + \dfrac{3}{x^2}\right)^{11}$, trouver la valeur de :

a $\dfrac{t_3}{t_2}$ b $\dfrac{t_4}{t_5}$ c $\dfrac{t_6}{t_8}$ d $\dfrac{\text{le coefficient de } t_4}{\text{le coefficient de } t_6}$

6 Dans le développement de $(1+x)^{12}$, si $t_3 = 2t_2$ trouver la valeur de x

7 Dans le développement de $(a+b)^n$ si $t_2 = 240$, $t_3 = 720$ et $t_4 = 1080$ trouver la valeur de a , b et n.

8) Si $t_2 : t_3$ dans le développement de $(a + b)^n$ est égal à $t_3 : t_4$ dans le développement de $(a + b)^{n+3}$ trouver la valeur de n

9) Dans le développement de $(1 + mx)^n$, si $4t_6 = 7t_8$ et $\frac{t_4}{t_6} = \frac{1}{4}$ pour x = 1, trouver la valeur de m et n.

10) Trouver la valeur numérique du plus grand terme dans le développement de $(3 - 5x)^{15}$ pour $x = \frac{1}{5}$.

11) Dans le développement de $(x + y)^n$ selon les puissances décroissantes de x, si le deuxième terme est une moyenne arithmétique entre le premier terme et le troisième terme pour x = 2y , trouver la valeur de n.

Résumé de l'unité

1 $A_n^r = n(n - 1)(n - 2) \ldots\ldots (n - r + 1)$

2 $A_n^r = \frac{n!}{(n - r)!}$

3 $1! = 0! = 1$

4 $C_n^r = \frac{A_n^r}{r!} = \frac{n!}{r!\ (n - r)!}$

5 $C_n^n = C_n^0 = 1$

6 $C_n^r = C_n^{n-r}$

7 Si $C_n^x = C_n^y$, alors $x = y$ ou $x + y = n$

8 $\frac{C_n^r}{C_n^{r-1}} = \frac{n - r + 1}{r}$

9 $C_n^r + C_n^{r-1} = C_{n+1}^r$

10 $C_n^r : C_{n-1}^{r-1} = \frac{n}{r}$

11 $(x + a)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} a + C_n^2 x^{n-2} a^2 + \ldots\ldots + a^n$

$(x - a)^n = x^n - C_n^1 x^{n-1} a + C_n^2 x^{n-2} a^2 + \ldots\ldots + (-a)^n$

12 $(x + a)^n + (x - a)^n = 2$ [la somme des termes de rangs impairs]

13 $(x + a)^n - (x - a)^n = 2$ [la somme des termes de rangs pairs]

14 $(1 \pm x)^n = 1 \pm C_n^1 x + C_n^2 x^2 \pm C_n^3 x^3 + \ldots\ldots + (\pm x)^n$

15 Le terme général dans le développement de $(x + a)^n$ est $t_{r+1} = C_n^r (x)^{n-r} (a)^r$

Le terme médian dans le développement de $(x + a)^n$

a Si n est un nombre impair, il y a deux termes médians de rangs $\frac{n + 1}{2}$, $\frac{n + 3}{2}$

b Si n est un nombre pair, il y a un terme médian unique de rang $\frac{n + 2}{2}$

16 Dans le développement de $(x + a)^n$, le rapport entre les deux termes consécutifs t_{r+1} et $t_r = \frac{n - r + 1}{r} \times \frac{a}{x}$

17 Dans le développement de $(x + a)^n$ le rapport entre les coefficients des deux termes consécutifs t_{r+1} et $t_r = \frac{n - r + 1}{r} \times \frac{\text{le coefficient de a}}{\text{le coefficient de x}}$

Exercices généraux

[1] Choisir la bonne réponse parmi les réponses proposées :

1. L'expression $C_n^r : C_{n-1}^{r-1} =$
   - a) n
   - b) r
   - c) $\frac{n}{r}$
   - d) $\frac{r}{n}$

2. Si $(x - 3)! \times A_x^3 = 20\,(x - 2)!$, alors $x =$
   - a) 0
   - b) 2
   - c) 5
   - d) 4

3. Si $C_{14}^{r^2} = C_{14}^{r+2}$, alors $r =$
   - a) 2
   - b) 4
   - c) 3
   - d) 2 أو 3

4. $A_n^r \div A_n^{r-1} =$
   - a) $n - r$
   - b) $n - r - 1$
   - c) $n - r + 1$
   - d) $n + r$

5. L'expression $C_n^r + C_n^{r+1} =$
   - a) C_{n+1}^r
   - b) C_n^{r+1}
   - c) C_{n+1}^{r+1}
   - d) C_{n+1}^{r+2}

6. Si $C_9^r > A_9^{r-1}$, alors
   - a) $r < 4$
   - b) $r > 4$
   - c) $r < 5$
   - d) $r > 5$

7. Si $A_{x+y}^2 = 210$, $A_{y-3}^3 = 35$, alors $(2x - y)! =$
   - a) 5
   - b) 10
   - c) 2
   - d) 1

8. Si $C_7^r > 1$, $C_r^5 > 1$, alors $(6 - r)! =$
   - a) 0
   - b) 1
   - c) 720
   - d) 6

9. Si $(1 + x)^n = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots + a_{10} x^{10}$ et si $\frac{a_2 + a_3}{a_2} = 3$, alors $n =$
   - a) 4
   - b) 6
   - c) 8
   - d) 9

10. si $1 + \frac{5}{2} x + \frac{5 \times 4}{4\,(2)!} x^2 + \frac{5 \times 4 \times 3}{8\,(2)!} x^3 + \dots + \frac{1}{32} x^5 = 1024$, alors $x =$
    - a) 5
    - b) 4
    - c) 6
    - d) 8

11. Dans le développement de $(ax + b)^{2n+1}$ si le deux termes médians sont égaux pour $x = 2$, alors =
    - a) $a = 2b$
    - b) $b = 2a$
    - c) $ab = 2$
    - d) $ab = \frac{1}{2}$

[2] Répondre aux questions suivantes :

12) Si $C_6^r = 4 \times {}^{6}\text{ل}_{r-1}$, $(n - r)! = 6$, trouver la valeur de n et r

13) Si $C_n^{n-2} = 45$, $A_m^{m-3} = 4$, trouver la valeur de $C_n^{m-2} \div C_n^{m-1}$

14) Si $n(n-1)(n-2) \ldots\ldots (n-r+1) = 5040$, $C_n^r = 210$, trouver la valeur de C_{n+1}^{2r}

15) Si $C_n^3 = 120$, $C_n^{r^2+2r} = C_n^{2r+5}$, trouver la valeur de C_n^{7r+3}

16) Si $C_n^r \div C_n^{r-1} = 5 : 7$, $C_n^r \div C_n^{r-1} = 5$, trouver la valeur de n et r .

17) Si $C_n^r : C_n^{r-1} : 5\, C_{n-1}^{r-2} = 7 : 4 : 6$, trouver la valeur de n et r .

18) Combien de nombres pairs supérieurs à 300 peut-on former en utilisant des chiffres parmi les chiffres 1 , 2 , 3 , 4 et 5 ?

a) avec remise   b) sans remise

19) Si $(n)! = 720$, $C_{n+1}^r : C_{n+1}^{r-1} = \frac{3}{5}$, trouver la valeur de C_{n+1}^{r-2}

20) Si $C_{n+2}^{r+1} = 9 \times C_r^{n+1} = 90 \times C_n^{r-1}$ trouver la valeur de n et r.

21) Si $C_n^r = 120 \times C_n^r$, trouver la valeur de C_{12}^{2r} puis trouver la plus petite valeur de n.

22) Démontrer que $C_n^1 + (2 \times C_n^2) + (3 \times C_n^3) + (4 \times C_n^4) + \ldots + (n \times C_n^n) = n \times 2^{n-1}$

23) Si $(1 + x)^{10} = 1 + C_{10}^1\, x + C_{10}^2\, x^2 + \ldots\ldots + C_{10}^{10}\, x^{10}$, utiliser ce résultat pour calculer :

a) $1 + C_{10}^1 + C_{10}^2 + \ldots\ldots + C_{10}^{10}$

b) $1 - C_{10}^1 + C_{10}^2 - \ldots\ldots + C_{10}^{10}$

c) $1 + 3 \times C_{10}^1 + 9 \times C_{10}^2 + 27 \times C_{10}^3 + \ldots\ldots + (3)^{10}$

24) Dans le développement de $(x^2 + \frac{1}{x})^n$, si le coefficient du quatrième terme est égal au coefficient du treizième terme, trouver la valeur de n et calculer le rang et la valeur du terme constant.

25) Dans le développement de $(1 + x)^n$, si $(t_3)^2 = t_2 \times t_5$, trouver la valeur de n pour $x = \frac{9}{5}$

26) Dans le développement de $(1 + x)^n$ si le coefficient de t_{10} est une moyenne arithmétique entre t_9 et t_{11} trouver la valeur de :

a) n b) A_n^2 c) $(n - 19)!$

27) Dans le développement de $(1 + x)^n$ selon les puissances croissantes de x,
si $t_8 : t_7 : t_6 = 6 : 14 : 21$ trouver la valeur de n et x .

28) Si trois termes consécutifs dans le développement de $(x + \frac{k}{x^2})^{27}$ sont dans le rapport 15 : 6 : 2 où $k \in \mathbb{Z}^+$ trouver les rangs de ces termes puis trouver le rang et la valeur du terme constant dans le développement.

29 Dans le développement de $(1 + mx)^n$ selon les puissances croissantes de x, si les trois premiers termes sont respectivement 1 , $\frac{-10}{3}x$ et $5x^2$, trouver la valeur de m et n puis trouver la valeur du terme médian dans le développement pour x = 3

30 Si le rang du terme constant dans le développement de $(2x^2 - \frac{3}{x})^{21}$ est égal au rang du terme constant dans le développement de $(x + \frac{1}{x})^{2n}$, trouver la valeur de n puis trouver le rapport entre les deux termes médians dans le second développement pour x = –1

31 Dans le développement de $(4x^2 + \frac{1}{2x})^{13}$, trouver le coefficient de x^5 puis trouver la valeur de x qui rend les deux termes médians du développement égaux. Démontrer ensuite qu'il n'existe pas de termes constants dans ce développement .

32 Dans le développement de $(1 + x)^n$, si les coefficients de trois termes consécutifs sont 35 , 21 et 7 , trouver la valeur de n et les rangs de ces trois termes.

33 Si le terme médian dans le développement de $(1 + x)^{10}$ est égal au double du septième terme, trouver la valeur de x

34 Si le développement de $(x^2 + \frac{1}{x})^n$ contient un terme constant, démontrer que n est un multiple de 3 puis trouver la valeur de ce terme pour n = 12.

35 Si les deux termes médians dans le développement de $(2x + 3)^{17}$ sont égaux, trouver la valeur de x?

36 Si a et b sont les deux termes médians dans le développement de $(x - \frac{1}{x})^{15}$ selon les puissances croissantes de x, démontrer que $a + bx^2 = 0$

37 Si le rapport entre le coefficient du sixième terme et le coefficient du quatrième terme dans le développement de $(\frac{3}{2} + \frac{2x}{3})^n$ selon les puissances croissantes de x est égal 8 : 27 , trouver la valeur de n.

38 Dans le développement de $(2x^2 + \frac{1}{2})^7$ selon les puissances décroissantes de x, trouver la valeur de x qui rend le troisième terme et le sixième terme égaux.

39 Si $t_4 = \frac{25}{3}\ t_2$ et $t_5 = t_6$ dans le développement de $(1 + x)^n$ selon les puissances croissantes de x, trouver la valeur de n et x.

40 Soit n un nombre entier positif. Si $(1 + cx)^n = 1 + m_1\ x + m_2\ x^2 + m_3\ x^3 + m_4\ x_4 + ...$, $m_1 = 12$ et $m_4 = 4m_2$, trouver la valeur de n et c.

41 Si le troisième terme, le quatrième terme et le cinquième terme dans le développement de $(x + y)^n$ selon les puissances décroissantes de x sont respectivement 112 , 448 et 1120 , trouver la valeur de x , y et n.

42 Dans le développement de $(\frac{2x}{3} + \frac{3}{2x^2})^{12}$, trouver :

a le terme médian

b le terme contenant x^3

43 Trouver le terme constant dans le développement de $(x + \frac{1}{x})^6 - (x - \frac{1}{x})^6$

44 Dans le développement de $(2x + \frac{3}{x^2})^n$, le neuvième terme et le dixième terme sont égaux et le rapport entre le sixième terme et le septième terme est égal à 8 : 15 , trouver la valeur de n puis démontrer que le développement ne contient pas de terme constant.

45 Dans le développement de $(x^2 + \frac{c}{x^3})^{15}$, trouver la valeur de c qui rend le coefficient de x^{10} égal au double du coefficient de x^{15}

46 Dans le développement de $(x^2 + \frac{1}{x})^{15}$, trouver le rapport entre le terme constant et la somme des coefficients des deux termes médians.

47 Dans le développement de $(x^k + \frac{1}{x})^8$ où k est un nombre entier positif, trouver :

a les valeurs de k pour que le développement ne contienne pas de terme constant.

b le rapport entre le terme constant et le coefficient du terme médian pour la plus grande valeur obtenue dans la première partie de la question.

48 Si $(1 + x)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... a_n x^n$ démontrer que :

a $\frac{a_1}{a_0} + \frac{2a_2}{a_1} + \frac{3a_3}{a_2} + ... + \frac{a_n^n}{a_{n-1}} = \frac{n}{2}(n + 1)$

b $a_0 + 2a_1 + 4a_2 + + 8a_3 + ... + 2 a_n^n = 3^n$

49 Si le troisième terme dans le développement de $(2x + \frac{1}{x^2})^n$ selon les puissances décroissantes de x est un terme constant, trouver la valeur de y qui rend ce terme et le deuxième terme dans le développement de $(1 + y^3)^{30}$ égaux.

50 Dans le développement de $(x^2 + \frac{1}{ax})^8$ si le coefficient du terme médian est égal à x^{10} , trouver la valeur de a.

51 Dans le développement de $(x^2 - \frac{1}{x})^{14}$, démontrer qu'il n'existe pas de terme constant puis trouver le rapport entre le septième terme et le sixième terme pour $x = -1$

52 Dans le développement de $(9x^2 + \frac{1}{x^3})^9$, trouver la valeur du terme constant puis démontrer que les deux termes médians sont égaux pour $x = \frac{1}{3}$

53 Dans le développement de $(x^2 + \frac{1}{x})^9$, trouver la valeur du terme constant et si le rapport entre ce terme et le sixième terme est égal à 3 : 2 , trouver la valeur réelle de x.

54 Dans le développement de $(x^2 + \frac{1}{x})^{3n}$, trouver le coefficient de x^{3n} , et si n est égale à 6 , trouver le rapport entre le coefficient de x^{3n} et le coefficient du terme médian.

Pour plus d'activités, visiter le site : www.sec3mathematics.com.eg

Épreuve cumulative

1 Dans le développement de $(1 + x)^{17}$, si le coefficient de t_{r+4} est égal au coefficient de t_{3r+3} alors r = ...

a 3 — b 4 — c 17 — d 7

2 Dans le développement de $(1 + x)^{27}$, si les deux termes médians sont dans le rapport = 1 : 3, alors x = ...

a 4 — b 3 — c $\frac{1}{3}$ — d $\frac{1}{4}$

3 $(\sqrt{2} + 1)^5 - (\sqrt{2} - 1)^5$ = ...

a -82 — b 82 — c $58\sqrt{2}$ — d $-58\sqrt{2}$

4 Le quatrième terme dans le développement de $(\frac{x}{3} + \frac{3}{x})^6$ est :

a $20x$ — b $\frac{20}{x}$ — c 20 — d $20x^2$

5 Le dernier terme dans le développement de $(2 - x)^5 (2 + x)^5$ est : ....

a x^5 — b $-x^5$ — c $-x^{10}$ — d x^{10}

6 Dans le développement de $(1 + x)^n$, démontrer que $\frac{t_{r+1}}{t_r} = \frac{n - r + 1}{r}$ x, Si le coefficient de t_{13} dans ce développement selon les puissances croissantes de x est égal au coefficient de t_{14} trouver la valeur de n et si $\frac{t_7}{t_5} = \frac{7}{8}$, trouver la valeur de x

7 a Si $C_n^2 + C_n^3 = n^2 + 6n + 5$, trouver la valeur de n.

b Trouver la valeur du terme constant dans le développement de $(\frac{1}{x^2})(x + \frac{1}{x^3})^{10}$

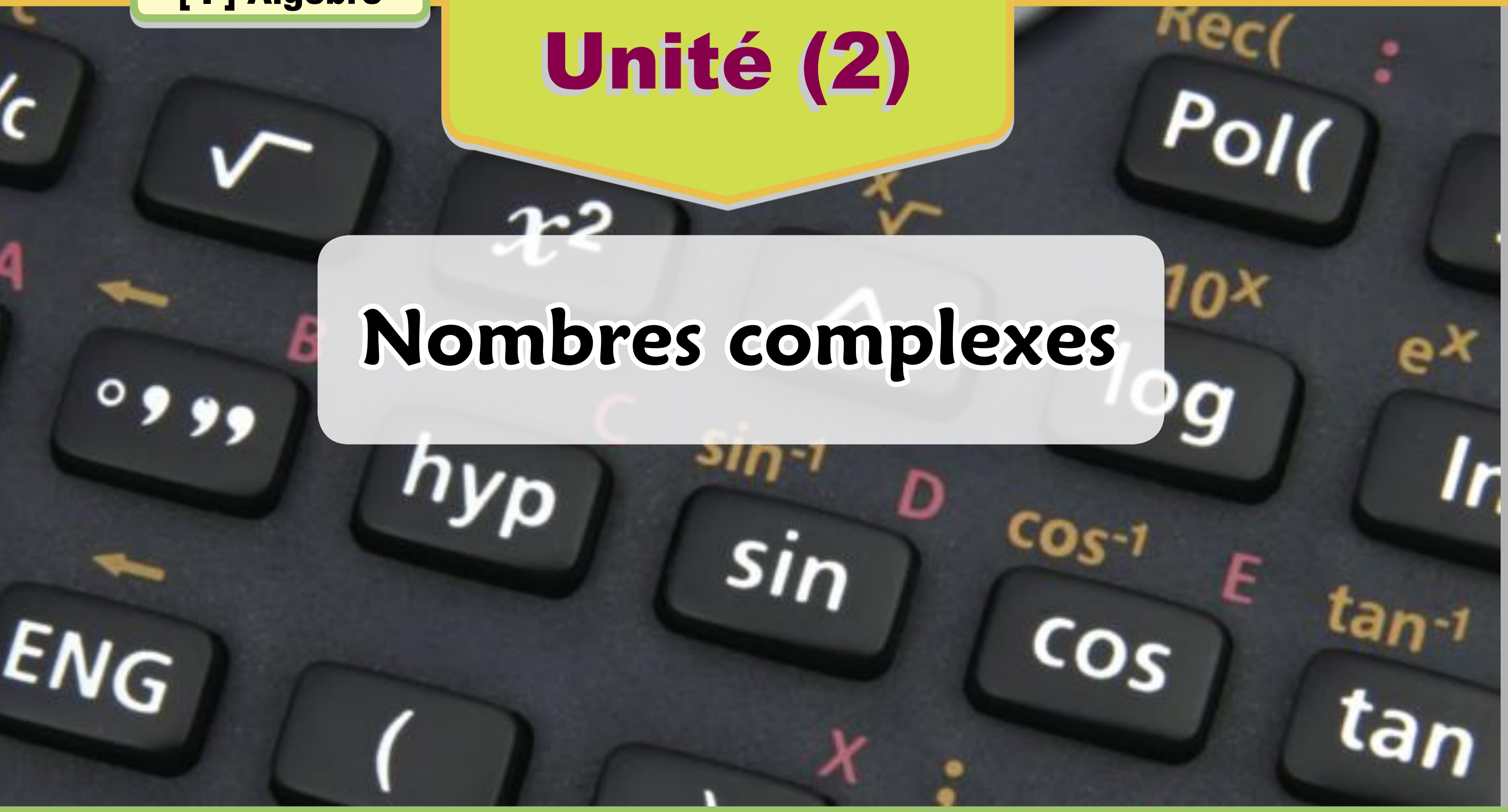
8 Dans le développement de $(1 - mx)^n$ si le deuxième terme = $\frac{-1}{4}x$ et le troisième terme $\frac{3}{100}x^2$, trouver la valeur de m et n.

9 On dispose des chiffres 1 , 2 , 3 , 4 et 5. Écrire le nombre de nombres inférieurs à 400 qu'on peut former en utilisant ces chiffres.

10 Dans le développement de $(\frac{3x}{2} + \frac{2}{3x})^n$, si le cinquième terme, le sixième terme et le septième terme sont dans le rapport 40 : 24 : 11 , trouver la valeur de n et x.

[I] Algèbre

Unité (2)



Nombres complexes

Introduction de l'unité

Jean-Robert Argand est considéré comme un mathématicien de renommée. C'est le premier qui a étudié en détails les nombres complexes et les a utilisés pour démontrer que toutes les équations algébriques ont des racines soient réelles soient imaginaires. Les nombres complexes sont présentés dans un diagramme connu sous le nom de diagramme d'Argand en honneur du savant Français Argand, soit par un point (x ; y) où x est le nombre réel représenté sur l'axe des abscisses et y représente le nombre imaginaire sur l'axe des ordonnées ou par un vecteur d'intensité égale à $x^2 + y^2$ et de direction $tg^{-1}\frac{x}{y}$. Nous étudierons également dans cette unité, les racines cubiques de l'unité et la résolution de problèmes sur les nombres complexes utilisés dans la vie quotidienne par exemple en électricité en dynamique, dans la théorie de la relativité et dans les différents domaines de la physique. Ces nombres sont des nombres flexibles qui ont la capacité d'atteindre le résultat final d'une façon acceptable.

Objectifs de l'unité

Après l'étude de l'unité, et après avoir réalisé les activités, il est attendu que l'élève soit capable de :

- Représenter un nombre complexe et son conjugué par des points (des couples) dans un repère.
- Déterminer le module et l'argument d'un nombre complexe.
- Identifier la détermination principale d'un nombre complexe.
- Identifier la forme trigonométrique d'un nombre complexe.
- Reconnaître le théorème de Moivre et ses applications.
- Déterminer les racines nième d'un nombre complexe.
- Exprimer sin $n\theta$ et cos $n\theta$ en fonction des rapports trigonométriques de l'angle et ses multiples.
- Reconnaître le développement de sin θ et cos θ comme suites.
- Déduire la formule d'Euler à travers les suites.
- Identifier et appliquer les méthodes de transformation entre les différentes formes d'un nombre complexe.
- Reconnaître les racines cubiques de l'unité.

- Identifier le module et l'argument du produit et du quotient d'un nombre complexe.
- Effectuer les opérations de base sur un nombre complexe dans la forme trigonométrique.
- Résoudre des problèmes sur les racines cubiques de l'unité.
- Utiliser les nombres complexes pour résoudre des problèmes mathématiques.
- Utiliser des logiciels pour résoudre des problèmes mathématiques comportant des nombres complexes.
- Déduire les propriétés de deux nombres.
- Déduire les propriétés des racines cubiques de l'unité.

Expressions de base

- *Plan d'Argand*
- *Conjugué*
- *Module*
- *Argument*
- *Forme trigonométrique*
- *Théorème de Moivre*
- *Racine*
- *Racine carrée*
- *Racine cubique*
- *Cercle*
- *unité*
- *polaire*

Matériel utilisé

- *Une calculatrice scientifique*

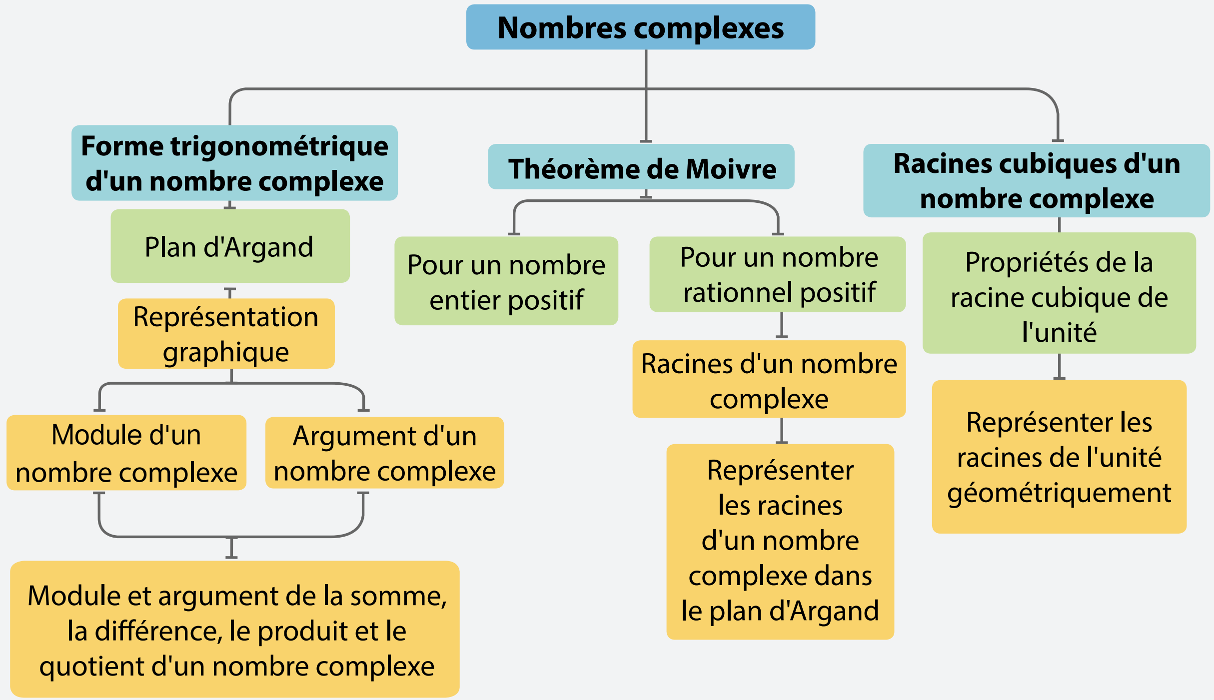
Leçons de l'unité

Lesson (2-1): Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Lesson (2-2): Théorème de Moivre

Lesson (2-3): Racines cubiques de l'unité

Organigramme de l'unité



Unité (2)

2 - 1 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

A apprendre

- Représentation graphique d'un nombre complexe et son conjugué dans le plan d'Argand.
- Représentation graphique de la somme de deux nombres complexes.
- Module d'un nombre complexe.
- Argument d'un nombre complexe.
- Détermination principale d'un nombre complexe.
- Forme trigonométrique d'un nombre complexe.
- Module et argument du produit et du quotient de deux nombres complexes.

Expressions de base

- Plan d'Argand
- Conjugué
- Argument
- Détermination principale
- Forme trigonométrique

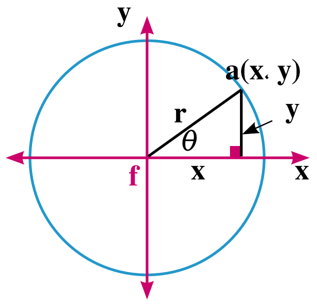
Matériel utilisé

- Calculatrice scientifique

Vous avez déjà étudié les nombres complexes. Un nombre complexe peut s'écrire sous la forme $z = x + iy$ **(forme algébrique)** où x et y sont deux nombres réels et $i^2 = -1$. Dans cette leçon, nous allons étudier d'autres formes d'écriture d'un nombre complexe et comment le représenter graphiquement.

Coordonnées polaires et cartésiennes

La figure ci-contre représente un cercle de longueur de rayon r. A(x ; y) est un point du cercle qui intercepte un angle de mesure θ.



$\sin\theta = \frac{y}{r}$ et $\cos\theta = \frac{x}{r}$

$\therefore\ x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$

Où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\text{tg}\,\theta = \frac{y}{x}$ d'où $\theta = \text{tg}^{-1}\frac{y}{x}$

Si on compare le plan cartésien et le plan polaire en superposant l'axe polaire sur le sens positif de l'axe des abscisses, on trouve qu'il est possible de transformer les coordonnées polaires en coordonnées cartésiennes et inversement.

Transformation des coordonnées polaires en coordonnées cartésiennes

Si les coordonnées polaires du point A sont $(r\ ;\ \theta)$, alors les coordonnées cartésiennes du même point sont (x ; y) telles que :

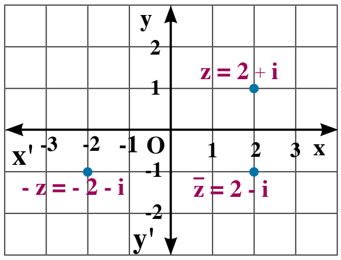
$x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ On a : $(x\ ;\ y) = (r\cos\theta\ ;\ r\sin\theta)$

Plan d'Argand

Le mathématicien Argand a représenté le nombre complexe z dans un repère orthogonal en utilisant l'axe $\overleftrightarrow{XX'}$ pour représenter la partie réelle du nombre complexe et l'axe $\overleftrightarrow{YY'}$ pour représenter sa partie imaginaire. Par conséquent, le point de coordonnées (x ; y) représente le nombre complexe x + i y

Exemple

1. Dans le plan d'Argand ci-contre, on remarque que les deux points représentant les deux nombres z et –z sont symétriques par rapport au point d'origine O.



On remarque également que les deux points représentant les nombres conjugués z et $\bar{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe $\overleftrightarrow{XX'}$.

Essayez de résoudre

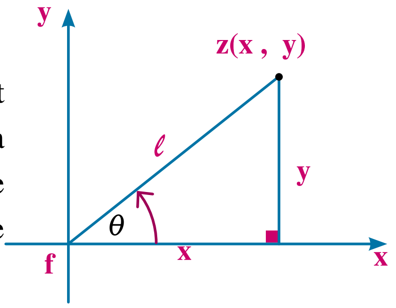
1) Représenter dans le plan d'Argand chacun des nombres suivants :

$z = 3 + 4i$, $\bar{z}$, $-z$, $1 + z$

Réflexion critique : Dans le plan d'Argand, que représentent tous les nombres complexes z ayant pour partie réelle 2 ?

A apprendre (1)

Module et argument d'un nombre complexe



Si z = x + y i est un nombre complexe représenté par le point (x ; y) dans le plan d'Argand, alors le module du nombre z est la distance de ce point par rapport au point d'origine O. Le module du nombre z est noté |Z| ou ℓ. θ est appelé l'argument du nombre complexe. On obtient :

$\ell = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $tg\theta = \frac{y}{x}$ d'où $\theta = tg^{-1}\frac{y}{x}$

Forme trigonométrique (polaire) d'un nombre complexe :

Si $z = x + y\,i$ est un nombre complexe d'argument de détermination principale θ où $\theta \in]-\pi, \pi]$, alors il s'écrit sous la forme $z = \ell(\cos\theta + i\sin\theta)$. La mesure de θ est déterminée selon les cas suivants:

a Si $x > 0$ et $y > 0$, alors θ est situé dans le premier quadrant et $\theta = tg^{-1}(\frac{y}{x})$

b Si $x < 0$ et $y > 0$, alors θ est situé dans le deuxième quadrant et $\theta = \pi + tg^{-1}(\frac{y}{x})$

c Si $x < 0$ et $y < 0$, alors θ est situé dans le troisième quadrant et $\theta = -\pi + tg^{-1}(\frac{y}{x})$

d Si $x > 0$ et $y < 0$, alors θ est situé dans le quatrième quadrant et $\theta = tg^{-1}(\frac{y}{x})$

Remarquez que

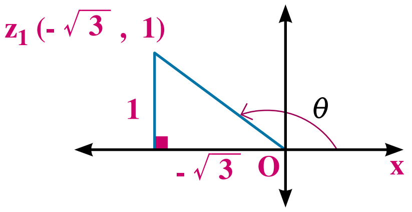
Si $x > 0$ et $y = 0$, alors $\theta = 0$
Si $x < 0$ et $y = 0$, alors $\theta = \pi$
Si $x = 0$ et $y > 0$, alors $\theta = \frac{\pi}{2}$
Si $x = 0$ et $y < 0$, alors $\theta = \frac{-\pi}{2}$

Exemple

2) Trouver le module et la détermination principale de l'argument de chacun des nombres complexes suivants:

a $z_1 = -\sqrt{3} + i$ **b** $z_2 = -1 - i$

Solution



∵ La forme d'un nombre complexe est z = x + yi , alors :

a $x = -\sqrt{3}$ et $y = 1$

∴ le nombre z_1 est situé dans le deuxième quadrant

$\ell = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{4} = 2$

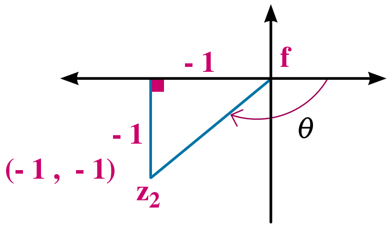
$\theta = \pi + tg^{-1}(\frac{-1}{\sqrt{3}}) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

b $x = -1$ et $y = -1$

$\therefore$ le nombre z_2 est situé dans le troisième quadrant

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$\theta = -\pi + tg^{-1}(\frac{1}{1}) = -\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{-3\pi}{4}$



Essayez de résoudre

(2) Trouver le module et la détermination principale de l'argument de chacun des nombres complexes suivants :

a $z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}\, i$ **b** $z_2 = 1 - \sqrt{3}\, i$

c $z_3 = -\sqrt{3}\, i$ **d** $z_4 = 5$

Rappel

$\frac{\theta^{rad}}{\pi} = \frac{\theta^{\circ}}{180^{\circ}}$

Cette formule est utilisée pour transformer la meure d'un angle de degrés en radians et inversement.

Propriétés du module et de l'argument d'un nombre complexe

Pour tout nombre complexe $z = x + y\,i$ d'argument θ , on a :

1) $|z| \geqslant 1$

2) L'argument d'un nombre complexe peut prendre une infinité de valeurs en ajoutant un nombre entier de tours 2π d'où l'argument d'un nombre complexe est égal à $\theta + 2\pi n$ où n est un nombre entier.

3) $|z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}|$ où $\bar{z}$ est le conjugué du nombre z.

4) $z\,\bar{z} = |z|^2 = |\bar{z}|^2$

Réflexion critique : Si θ est la détermination principale de l'argument d'un nombre complexe z, trouver la détermination principale de l'argument de chacun des nombres $-z$, $\bar{z}$ et $\frac{1}{z}$.

Exemple

(3) Écrire chacun des nombres complexes suivants sous la forme trigonométrique:

a $z_1 = 2 - 2\sqrt{3}\, i$ **b** $z_2 = -4i$ **c** $z_3 = \frac{-4}{\sqrt{3} + i}$ **d** $z_4 = -3$

Solution

$\because$ La forme d'un nombre complexe est $z = x + y\,i$, alors :

a $x = 2$ et $y = -2\sqrt{3}$

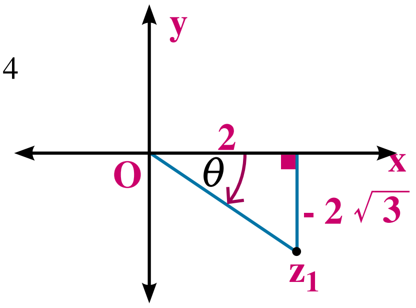
$\therefore z_1$ est situé dans le quatrième quadrant

$\ell = |z_1| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(2)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{16} = 4$

$\theta = tg^{-1}(\frac{-2\sqrt{3}}{2}) = \frac{-\pi}{3}$

$\therefore z_1 = \ell(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= 4(\cos(\frac{-\pi}{3}) + i\sin(\frac{-\pi}{3}))$

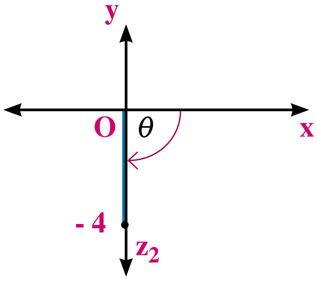


b $\because$ $x = 0$ et $y = -4$

$\therefore$ z_2 est situé sur l'axe des ordonnées

$\ell = |z_2| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(0)^2 + (-4)^2} = 4$

$\theta = \frac{-\pi}{2}$ $\therefore$ $z_2 = 4(\cos(\frac{-\pi}{2}) + i\sin(\frac{-\pi}{2}))$



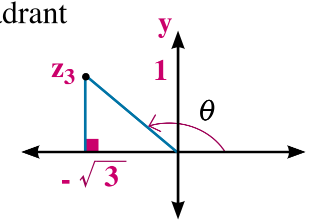
c $z_3 = \frac{-4}{\sqrt{3} + i} \times \frac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{3} - i} = -\sqrt{3} + i$ En multipliant par le conjugué du dénominateur

$x = -\sqrt{3}$, $y = 1$ $\therefore$ z_3 est situé dans le deuxième quadrant

$\ell = |z_3| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3 + 1} = 2$

$\theta = \pi - \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{5\pi}{6}$

$z_3 = 2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})$



d $\because$ $x = -3$ et $y = 0$ $\therefore$ z_4 est situé sur l'axe des abscisses

$1 = |z_4| = \sqrt{(x)^2 + (y)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (0)^2} = 3$

$\theta = \pi$ $\therefore$ $z_2 = 3(\cos\pi + i\sin\pi)$

Essayez de résoudre

3 Écrire chacun des nombres complexes suivants sous la forme trigonométrique :

a $z_1 = 8$ **b** $z_2 = 5i$ **c** $z_3 = -3 - 3i$

Exemple

4 Écrire chacun des nombres complexes suivants sous la forme trigonométrique:

a $z_1 = -8(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)$

b $z_2 = 2(\sin\frac{4}{3}\pi - i\cos\frac{4}{3}\pi)$

Rappel

$\cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$

Solution

a $z_1 = -8(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)$

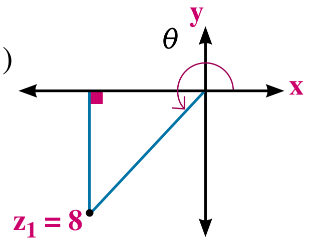
$= 8(-\cos 45^\circ - i\sin 45^\circ)$

$\because$ $x < 0$, $y < 0$ $\therefore$ z_1 est situé dans le troisième quadrant

$\because$ $-\cos 45^\circ = \cos(180^\circ + 45^\circ)$, $-\sin 45^\circ = \sin(180^\circ + 45^\circ)$

$\therefore$ $z_1 = 8(\cos 225^\circ + i\sin 225^\circ) = 8(\cos -135^\circ + i\sin -135^\circ)$

$\therefore$ le module de $z_1 = 8$ et la détermination principale $\theta = -135^\circ$



b $z_2 = z_1 = 2\,(\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi)$

$\because\ x > 0$ et $y < 0$ $\therefore z_2$ est situé dans le quatrième quadrant

$\because\ \sin \frac{4}{3}\pi = \cos(\frac{3\pi}{2} + \frac{4}{3}\pi) = \cos \frac{17}{6}\pi = \cos(\frac{5\pi}{6})$

$-\cos \frac{4}{3}\pi = \sin(\frac{3\pi}{2} + \frac{4}{3}\pi) = \sin(\frac{17}{6}\pi) = \sin(\frac{5\pi}{6})$

$\therefore\ z_2 = 2(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}))$

$\therefore$ le module de $z_2 = 2$ et la détermination principale $\theta = \frac{5\pi}{6}$

Rappel

$\sin(\frac{\pi}{2} + \theta) = \cos\theta$

$\cos(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\sin\theta$

$\sin(\frac{3\pi}{2} + \theta) = -\cos\theta$

$\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta) = \sin\theta$

Essayez de résoudre

4 Trouver le module et la détermination principale de l'argument de chacun des nombres suivants :

a $z_1 = 2\,(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3})$ **b** $z_2 = \frac{-1}{\sqrt{2}}(\sin 45° - i \sin 45°)$

A apprendre (2)

Multiplication et division des nombres complexes en utilisant la forme trigonométrique

Si $z_1 = \ell_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ et $z_2 = \ell_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ alors :

1) $z_1 z_2 = \ell_1\ell_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$= \ell_1\ell_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$ **(1)**

Donc. $|z_1 z_2| = \ell_1\ell_2 = |z_1||z_2|$

a L'argument de $(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2$

2) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\ell_1}{\ell_2} \times \frac{\cos\theta_1 + i\sin\theta_1}{\cos\theta_2 + i\sin\theta_2} = \frac{\ell_1}{\ell_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))$ **(2)**

Donc $|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ et L'argument de $(\frac{z_1}{z_2}) = \theta_1 - \theta_2$

Avec l'aide de votre enseignant, démontrer les relations (1) et (2).

Exemple

5 Exprimer $3\,(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}) \times 4\,(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})$ sous la forme $x + y\,i$

Solution

$3\,(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}) \times 4(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})$

$= 3 \times 4((\cos\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{12}) + i\sin(\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{12}))$

$= 12\,(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 12(0 + i\,(1)) = 12\,i$

Essayez de résoudre

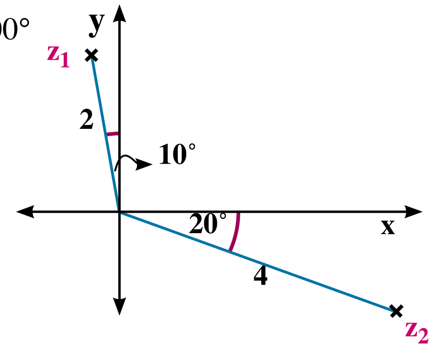
5) Exprimer $2(\cos\frac{\pi}{15} + i\sin\frac{\pi}{15}) \times 3(\cos\frac{-2\pi}{5} + i\sin\frac{-2\pi}{5}))$ sous la forme $x + y\,i$

Rappel

- $1 = \cos 0 + i \sin 0$
- $-1 = \cos \pi + i \sin \pi$
- $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$
- $-i = \cos\frac{-\pi}{2} + i\sin\frac{-\pi}{2}$

Exemple

6) Si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes représentés dans le plan d'Argand comme le montre la figure ci-contre, trouver le nombre $\frac{z_2}{z_1}$ sous la forme $x + y\,i$.



Solution

D'après la figure, $|z_1| = 2$ et l'argument de $= 90° + 10° = 100°$

$\therefore\ z_1 = 2(\cos 100° + i \sin 100°)$

$|z_2| = 4$ et $\arg z_2 = -20°$

$\therefore\ z_2 = 4(\cos(-20°) + i\sin(-20°))$

$$\therefore\ \frac{z_2}{z_1} = \frac{4}{2} \times \frac{\cos(-20°) + i\sin(-20°)}{(\cos 100° + i \sin 100°)}$$

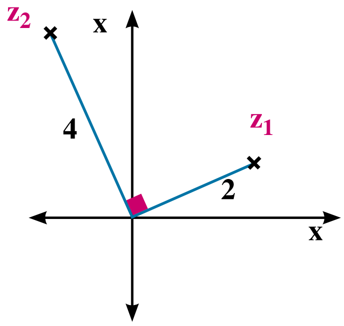
$$= 2[\cos(-20° - 100°) + i\sin(-20° - 100°)]$$

$$= 2(\cos(-120°) + i\sin(-120°))$$

$$= 2(-\frac{1}{2} - i \times \frac{\sqrt{3}}{2}) = -1 - \sqrt{3}\,i$$

Essayez de résoudre

6) Utiliser le plan d'Argand ci-contre pour mettre le nombre $\frac{z_2}{z_1}$ sous la forme $x + y\,i$



Corollaires :

1) Si $z = \ell(\cos\theta + r\sin\theta)$ alors

(a) $\frac{1}{z} = \frac{1}{\ell}(\cos(-\theta) + r\sin(-\theta))$ (b) $z^2 = \ell^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$

2) Nous pouvons généraliser la règle de multiplication sur un nombre déterminé de nombres complexes. Si $z_1, z_2, \ldots\ldots$ et z_n sont des nombres complexes et si :

$z_1 = \ell_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = \ell_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, ... , $z_n = \ell_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$

alors: $z_1 z_2 \ldots\ldots z_n = \ell_1 \ell_2 \ldots\ldots \ell_n(\cos(\theta_1 + \theta_2 + \ldots\ldots + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \ldots\ldots + \theta_n))$

Dans le cas particulier où $z_1 = z_2 = \ldots\ldots = z_n = \ell(\cos\theta + i\sin\theta)$ on a :

$$z^n = \ell^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

Exemple

7) Mettre le nombre $1 - i$ sous la forme trigonométrique puis trouver $(1 - i)^8$

Solution

$\because\ x = 1$ et $y = -1$ $\quad\therefore\ \ell = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$\because\ x > 0$ et $y < 0$ $\quad\therefore$ z est situé dans le quatrième quadrant

$\theta = tg^{-1}(\frac{-1}{1}) = \frac{-\pi}{4}$ $\quad\therefore\ 1 - i = \sqrt{2}\,(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4})$

$$\therefore\ (1 - i)^8 = (\sqrt{2})^8\ \cos(\frac{-\pi}{4}) + i\sin(\frac{-\pi}{4}))^8$$
$$= 16\,(\cos(-2\pi) + i\sin(-2\pi))$$
$$= 16\,(\cos 0 + i\sin 0\ ) = 16$$

Essayez de résoudre

7) Si $z_1 = 2(\cos 10° + i\sin 10°)$ et $z_2 = 3(\cos 40° + i\sin 40°)$

trouver le nombre $z_1^4\, z_2^2$ sous la forme x - y i

Forme exponentielle d'un nombre complexe (Formule d'Euler)

Nous pouvons exprimer toute fonction dans la variable x comme une suite de puissances de x appelée la suite de Taylor. Dans ce qui suit, nous présenterons le développement de Taylor pour certaines fonctions qui feront l'objet d'étude dans cette unité.

1) La fonction sinus : y = sin x

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\cdots + (-1)^{n-1} \times \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots\cdots$$

(La fonction sinus est une fonction impaire car sin (–x) = – sin x. Par conséquent, le développement contient les puissances impaires de x)

2) La fonction cosinus : y = cos x

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\cdots + (-1)^{n-1} \times \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \cdots\cdots$$

(La fonction cosinus est une fonction paire car cos (–x) = cos x. Par conséquent, le développement contient les puissances paires de x)

3) La fonction exponentielle $y = e^x$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \cdots\cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\cdots$$

Remarquez que

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{i^2x^2}{2!} + \frac{i^3x^3}{3!} + \cdots\cdots + \frac{i^n x^n}{n!} + \cdots\cdots$$
$$= 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \cdots\cdots$$
$$= (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\cdots) + i(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots\cdots)$$

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

Donc le nombre complexe $z = x + iy = \ell\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ peut s'écrire sous la forme : $z = \ell\, e^{\theta i}$ Cette forme est appelée la forme d'Euler où θ es mesuré en radians.

Pour information

L'équation $e^{\pi i} + 1 = 0$ est le lien entre les cinq nombres les plus célèbres. Dans la formule d'Euler, θ doit être en radians.

Exemple

8 Écrire chacun des nombres complexes suivants sous la forme exponentielle (forme d'Euler):

a $z_1 = 1 + i$ **b** $z_2 = -1 + \sqrt{3}\ i$ **c** $z_3 = e^{3 + \frac{\pi}{6} i}$ **d** $z_4 = -2i$

Solution

a $z_1 = 1 + i$ $\therefore\ x = 1$ et $y = 1$

$\ell = |z_1| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$

$\because\ x > 0$ et $y > 0$ $\therefore\ z_1$ est situé dans le premier quadrant

$\theta = \tan^{-1}(\frac{1}{1}) = \frac{\pi}{4}$ $\therefore\ z_1 = \ell\, e^{\theta i} = \sqrt{2}\ e^{\frac{\pi}{4} i}$

b $z_2 = -1 + \sqrt{3}\ i$ $\therefore\ x = -1$ et $y = \sqrt{3}$

$\ell = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$

$\because\ x < 0$ et $y > 0$ $\therefore\ z_2$ est situé dans le deuxième quadrant

$\therefore\ \theta = \pi + \tan^{-1}(-\sqrt{3}) = \frac{2}{3}\pi$ $\therefore\ z_2 = \ell\, e^{\theta i} = 2\, e^{\frac{2}{3}\pi i}$

c $z_3 = e^{3 + \frac{\pi}{6} i} = e^3 \times e^{\frac{\pi}{6} i}$ Donc $\ell = |z_3| = e^2$, et l'argument de $z_3 = \frac{\pi}{6}$

d $\because\ z_4 = -2i$ $\therefore\ x = 0$ et $y = -2$ $\therefore\ \ell = \sqrt{(0)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4} = 2$

$\because\ x = 0$ et $y = -2$ $\therefore\ z_4$ est situé sur l'axe des ordonnées

$\therefore\ \theta = \frac{-\pi}{2}$ $\therefore\ z_4 = 2\, e^{\frac{-\pi}{2}} e$

Essayez de résoudre

8 Si $z = \frac{\sqrt{2}\ i}{1 + i}$ écrire le nombre z sous la forme exponentielle.

Multiplication et division des nombre complexes en utilisant la forme exponentielle.

Si $z_1 = \ell_1\, e^{\theta_1 i}$ et $z_2 = \ell_2\, e^{\theta_2 i}$

Alors $z_1 z_2 = \ell_1 \ell_2\, e^{\theta_1 i} \times e^{\theta_2 i} = \ell_1 \ell_2\, e^{(\theta_1 + \theta_2) i}$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\ell_1}{\ell_2} \times \frac{e^{\theta_1 i}}{e^{\theta_2 i}} = \frac{\ell_1}{\ell_2}\, e^{(\theta_1 - \theta_2) i}$$

Exemple

9 Trouver le résultat de ce qui suit sous la forme exponentielle :

a $2(\cos 25^\circ + i \sin 25^\circ) \times 2(\sin 158^\circ - i \sin 158^\circ)$ **b** $(\frac{1 + i}{1 - i})^7$

Solution

a Mettre le nombre z_2 sous la forme trigonométrique comme suit :

$\because$ (sin 158° - i sin 158°) = sin (90° + 68°) - i cos (90° + 68°) = cos 68° + i sin 68°

$\therefore$ 3 (cos 25° + i sin 25°) × 2 (cos 68° + i sin 68°)

= 6 (cos (25° + 68°) + i sin (25° + 68°))

= 6 (cos 93° + i sin 93°) = $6\,e^{1,62i}$

b $\because 1 + i = \sqrt{2}\,(\cos 45° + i \sin 45°)$

$1 - i = \sqrt{2}\,(\cos (-45°) + i \sin (-45°))$

$\therefore \left(\frac{1+i}{1-i}\right) = \cos (45° + 45°) + i \sin (45° + 45°)$

$= \cos 90° + i \sin 90° = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$

$\therefore \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^7 = \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)^7 = \cos \frac{7\pi}{2} + i \sin \frac{7\pi}{2}$

$= \cos \left(\frac{-\pi}{2}\right) + i \sin \left(\frac{-\pi}{2}\right) \qquad = e^{\frac{-\pi}{2} i}$

Remarquez que

$$\frac{93°}{180°} = \frac{\theta^{rad}}{\pi}$$

Donc : $\theta^{rad} = \frac{93°}{180°} \times \pi$

$\theta^{rad} \simeq 1,62$

Essayez de résoudre

9 Si $z_1 = 1 - \sqrt{3}\, i$ et $z_2 = 1 + i$, écrire les nombres suivants sous la forme trigonométrique:

a $z_1\, z_2$ **b** $\frac{z_2}{z_1}$ **c** $(z_2)^6$

Exemple

10 Exprimer le nombre $z = \sqrt{2}\, e^{\frac{3\pi}{4} i}$ sous la forme algébrique $x + y\, i$ où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

Solution

$\because z = \sqrt{2}\, e^{\frac{3\pi}{4} i} \qquad \therefore \ell = |z| = \sqrt{2}$ et $\theta = \frac{3\pi}{4}$

$\therefore z = \sqrt{2}\,\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)$

$= \sqrt{2}\,\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i\right)$

$= -1 + i$

Remarquez que

$\cos \frac{3\pi}{4} = \cos 135° = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$\sin \frac{3\pi}{4} = \sin 135° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Essayez de résoudre

10 Exprimer le nombre $z = 8\, e^{\frac{\pi}{6} i}$ sous la forme algébrique $x + y\, i$ où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

Exercises 2 - 1

Compléter ce qui suit :

1. Le nombre $z = 3 - 4\,i$ est représenté dans le plan d'Argand par le point A où A = (.............., ...)

2. Si le point A représente le nombre z dans le plan d'Argand et si le point B représente le nombre $\overline{z}$ dans le plan d'Argand, alors A est l'image de B par symétrie par rapport à ....

3. Le module du nombre complexe $z = -5\,i$ est égal à ....

4. Si $z = \frac{2 - i}{2 + i}$, alors $|z|$ = ...

5. Si θ est la détermination principale de l'argument d'un nombre complexe z , alors son module $\overline{z}$ est ....

6. Si $z = \frac{1}{\overline{z}}$ alors $|z|$ = ...

7. La forme exponentielle du nombre $-1 + i$ est ....

8. Si $z = 1 + \sqrt{3}\,i$ alors la détermination principale du nombre $(z)^8$ est ....

9. La forme trigonométrique du nombre $z = 2 - 2\sqrt{3}\,i$ est ....

10. Si l'argument d'un nombre complexe z est θ, alors l'argument d'un nombre complexe 2z est

Choisir la bonne réponse parmi les réponses proposées :

11. Si $z = \sqrt{2}\,(\sin 30° + i \cos 30°)$ alors la détermination principale de l'argument de z est égale à ....
 a) 30° b) 60° c) 90° d) 120°

12. Si $z = (1 + \sqrt{3}\,i)^n$ et $|Z| = 8$ alors la détermination principale de l'argument de z est égale à ....
 a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{6}$ d) π

13. Si $z_1 = \ell_1 (\cos\theta_1 + i \sin\theta_1)$ et $z_2 = \ell_2 (\cos\theta_2 + i \sin\theta_2)$ et si $\theta_1 + \theta_2 = \pi$ alors $z_1 z_2$ = ...
 a) $\ell_1\ell_2$ b) $-\ell_1\ell_2$ c) $\ell_1\ell_2 i$ d) $-\ell_1\ell_2\, i$

14. Pour le nombre complexe $z = -3$, l'argument est égal à ....
 a) 0° b) 90° c) 180° d) 270°

15. Si $z = -1 + \sqrt{3}$ alors $|\overline{z}|$ = ...
 a) $-1 - \sqrt{3}\,i$ b) $\sqrt{2}$ c) 2 d) -2

16 Si $z_1 = -1 + \sqrt{3}\ i$ alors la forme exponentielle de z est ....

a $e^{\frac{3\pi}{4} i}$ **b** $e^{\frac{5\pi}{4} i}$ **c** $\sqrt{2}\, e^{\frac{-3\pi}{4} i}$ **d** $\sqrt{2}\, e^{225\, i}$

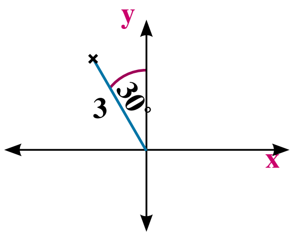
17 Si $z_1 = 2 + 2\sqrt{3}\ i$ et $z_2 = -3 - 3\sqrt{3}$ alors l'argument du nombre $z_1 + z_2 =$ ....

a 60°   **b** 240°   **c** 180°   **d** 300°

18 Si $x + y\,i = \dfrac{a + b\,i}{a - b\,i}$ alors $x^2 + y^2 =$ ....

a $a^2 + b^2$ **b** $a^2 - b^2$ **c** $2a\ b$ **d** 1

19 La figure ci-contre représente le nombre complexe ....



a 3(cos 30°+ i sin 30°)
b 3(cos 60°+ i sin 60°)
c 3(cos 120°+ i sin 120°)
d 3(cos 150°+ i sin 150°)

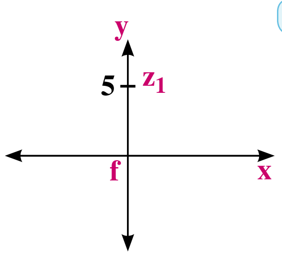
20 Si la détermination principale de l'argument d'un nombre z est θ , alors l'argument de est .... où $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ et $\theta \neq \pi$

a θ **b** $-\theta$ **c** $\pi - \theta$ **d** $-\pi + \theta$

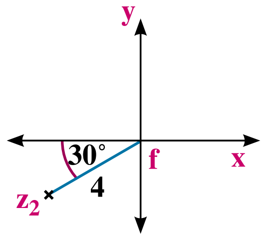
Répondre aux questions suivantes :

21 Écrire chacun des nombres suivants sous la forme trigonométrique :

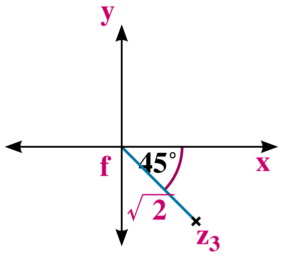
a



b



c



d $z_4 = -3 + 4i$

e $z_5 = 4\,(\cos 40° - i \sin 40°)$

22 Trouver le module et la détermination principale de l'argument de chacun des nombres complexe suivants:

a $z_1 = -1 + i$

b $z_2 = \dfrac{4}{\sqrt{3} - i}$

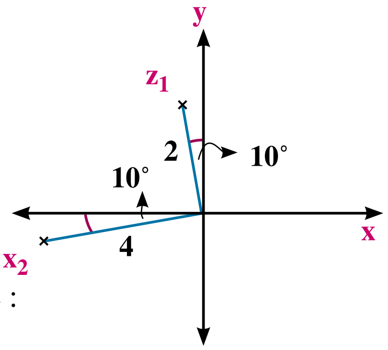
c $z_3 = -2(\cos 45° + i \sin 45°)$

d $z_4 = 1 + i\ \mathrm{tg}\ 20°$

23 Si $z_1 = \cos 114^\circ + i \sin 66^\circ$ et $z_2 = \cos 42^\circ + i \sin 138^\circ$ et $z_3 = \sin 24 + i \sin 114$, trouver la forme algébrique du nombre $\frac{z_1 z_2}{z_3}$

24 Si $z_1 = 2 (\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)$ et $z_2 = 4 (\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)$, trouver la forme exponentielle les nombres $z_1 z_2$ et $\frac{z_1}{z_2}$

25 **Dans la figure ci contre** trouver la forme exponentielle du nombre : $\frac{z_1}{z_2}$



26 Écrire chacun des nombres suivants sous la forme algébrique :

a $z_1 = e^{\frac{\pi}{3} i}$

b $z_2 = 2\, e^{\frac{3\pi}{4} i}$

c $3\, e^{\frac{-\pi}{6} i}$

27 Si $z = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$ démontrer que $\frac{1}{z} = \frac{1}{2}\, e^{\frac{5\pi}{3} i}$

28 Si $z = \sqrt{3} + i$ trouver sous la forme algébrique le nombre z^6

29 Si $z = \frac{(a + b) + i\,(a - b)}{(a - b) - i\,(a + b)}$ trouver le nombre z sous la forme la plus simple puis trouver $|z|$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$

30 **Réflexion créative :** Si $z_1 = \cos 75 + i \sin 75$ et $z_2 = \cos 15 + i \sin 15$, trouver la forme trigonométrique le nombre : $z_1 + z_2$

31 Si l'argument de $z_1 = \frac{\pi}{3}$, l'argument de $z_2 = \frac{3\pi}{4}$ et l'argument de $z_3 = \frac{\pi}{6}$, trouver :

a l'argument de $(z_1^3\, z_2^2)$

b l'argument de $(2z_1 \,.\, z_2)$

c l'argument de $(\frac{z_1 z_2}{z_3})$

d l'argument de $(z_3)^6$

32 **Réflexion créative :** Démontrer que $\cos \theta = \frac{1}{2} (e^{\theta i} + e^{-\theta i})$ et $\sin \theta = \frac{-i}{2} (e^{\theta i} - e^{-\theta i})$

Unité (2)

2 - 2

Théorème de Moivre

A apprendre

- *Théorème de Moivre pour une puissance rationnelle positive.*
- *Racines d'un nombre complexe.*
- *Représenter les racines d'un nombre complexe dans le plan d'Argand.*

Expressions de base

- *Théorème de Moivre*
- *Racine*

Réfléchir et discuter

a Si z est un nombre complexe de module ℓ et de détermination principale d'argument θ, trouver :

1) le module de z^3

2) l'argument de z^3

b Soit z est un nombre complexe. Si la détermination principale de l'argument de z^3 est θ, alors la détermination principale de l'argument du nombre z est ....

À apprendre

Théorème de Moivre pour une puissance entière positive

Si n est un nombre entier positif

alors $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + \sin n\theta$

Exemple

1 Exprimer $\cos 3\theta$ en fonction des puissances de $\cos\theta$

Solution

$\because\ (\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$ **(1) Théorème de Moivre.**

et aussi $(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + 3c_1\cos 2\theta\ (i\sin\theta).$

$+ 3c_2\cos\theta\,(i\sin\theta)^2 + (i\sin\theta)^3$

(Formule du binôme).

$= \cos^3\theta + 3i\cos 2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin 2\theta - i\sin 3\theta$ **(2)**

De (1) et (2), en égalisant les parties réelles .

$\because\ \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \therefore\ \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$\therefore\ \cos^3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$

$= \cos^3\theta - 3\cos\theta\,(1 - \cos^2\theta)$

$= \cos^3\theta - 3\cos\theta + 3\cos^3\theta$

$= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta.$

Essayez de résoudre

1 Exprimer $\cos 3\theta$ en fonction des puissances de $\sin\theta$

Théorème de Moivre pour une puissance entière positive

On sait que $\cos\theta + i\sin\theta = \cos(\theta + 2r\pi) + i\sin(\theta + 2r\pi)$ où r est un nombre entier.

Si k est un nombre positif, alors $(\cos\theta + i\sin\theta)^{\frac{1}{k}} = \cos\frac{\theta + 2r\pi}{k} + i\sin\frac{\theta + 2r\pi}{k}$

Donc l'expression $(\cos\theta + i\sin\theta)^{\frac{1}{k}}$ prend plusieurs valeurs suivant les valeurs de r. Le nombre de ces différentes valeurs est égal à k. On obtient ces valeurs en posant r = ... , - 2 , - 1 , 0 , 1 , 2 ....

Ces valeurs rendent l'argument $\frac{\theta + 2r\pi}{k}$ compris entre $-\pi$ et π

Exemple

(2) Trouver dans $\mathbb{C}$, l'ensemble solution de l'équation $z^4 = 8(1 - \sqrt{3}\,i)$

Solution

On met le nombre $1 - \sqrt{3}\,i$ sous la forme trigonométrique. $x = 1$ et $y = -\sqrt{3}$

$\therefore$ Le nombre $1 - \sqrt{3}\,i$ est situé dans le quatrième quadrant.

$\because\ Z^4 = 8 - 8\sqrt{3}\,i \qquad \therefore\ x = 8,\ y = -8\sqrt{3}$

$r = \sqrt{(8)^2 + (-8\sqrt{3})^2} = 16,\quad \tan\theta = \frac{-8\sqrt{3}}{8} = -\sqrt{3}$

$\because\ x > 0,\ y < 0 \qquad \therefore\ Z^4$ est situé dans le quatrième quadrant

$\theta = \tan^{-1}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$

pour $r = 0$ **on a** $z_1 = 2\left(\cos\left(\frac{-\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{12}\right)\right) = 2e^{\frac{-\pi}{12}i}$

pour $r = 1$ **on a** $z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right) = 2e^{\frac{5\pi}{12}i}$

pour $r = -1$ **on a** $z_3 = 2\left(\cos\left(\frac{-7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{-7\pi}{12}\right)\right) = 2e^{\frac{-7\pi}{12}i}$

pour $r = 2$ **on a** $z_4 = 2\left(\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right) = 2e^{\frac{11\pi}{12}i}$

$\therefore$ L'ensemble solution $= \{2e^{\frac{-\pi}{12}i},\ 2e^{\frac{5\pi}{12}i},\ 2e^{\frac{-7\pi}{12}i},\ 2e^{\frac{11\pi}{12}i}\}$

Essayez de résoudre

(2) Trouver dans $\mathbb{C}$, l'ensemble solution de l'équation $z^4 = 2 + 2\sqrt{3}i$

Exemple

(3) Trouver les racines de l'équation $z^3 = 1$, puis représenter ces racines dans le plan d'Argand.

Solution

$z^3 = 1$

$= \cos 0^\circ + i\sin 0^\circ$

$\therefore\ z = (\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ)^{\frac{1}{3}}$

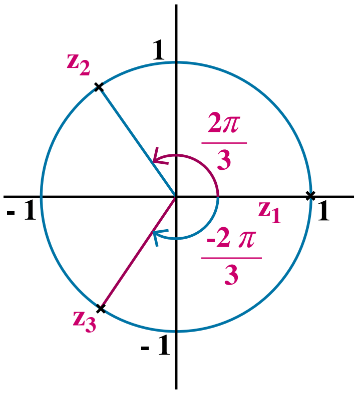
$= \cos \frac{1}{3}(2r\pi) + i \sin \frac{1}{3}(2r\pi)$

Pour r = 0 on a $z_1 = \cos 0° + i \sin 0° = 1$

Pour r = 1 on a $z_2 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$

Pour r = - 1 on a $z_3 = \cos \frac{-2\pi}{3} + i \sin \frac{-2\pi}{3}$

Les racines partagent le cercle ayant pour centre le point d'origine et pour rayon l'unité en trois parties égales. La mesure de l'angle au centre de chaque partie est 120° (les trois points sont les sommets d'un triangle équilatéral).



Essayez de résoudre

3 Trouver les racines de l'équation $z^4 = 1$ puis représenter ces racines dans le plan d'Argand.

Racines nièmes

L'équation $x^n = a$ où a est un nombre complexe admet n racines sous la forme $x = a^{\frac{1}{n}}$.
Nous pouvons calculer ces racines en trouvant la forme trigonométrique du nombre a puis appliquer le théorème de Moivre. Les racines se trouvent dans le plan d'Argand sur un cercle ayant pour centre le point d'origine et pour rayon l'unité $|a|^{\frac{1}{n}}$. Les points représentant ces racines sont les sommets d'un polygone régulier de nombre de sommets n.

Exemple **(Racines cinquièmes du nombre - 32)**

4 Représenter sur le plan d'Argand les racines cinquièmes du nombre - 32

Solution

Les racines cinquièmes du nombre –32 sont les solutions de l'équation $z^5 = -32$

En mettant le nombre –32 sous la forme trigonométrique :

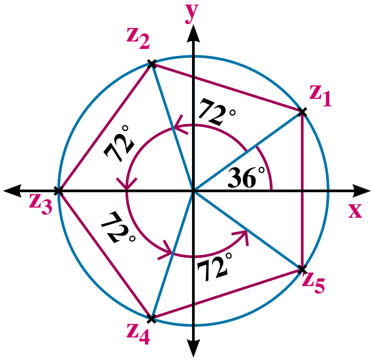
$\therefore z^5 = 32 (\cos \pi + i \sin\pi)$

$\therefore z = 32^{\frac{1}{5}} (\cos\pi + i \sin\pi)^{\frac{1}{5}}$

$= 2 (\cos \frac{1}{5}(\pi + 2r\pi) + i \sin \frac{1}{5}(\pi + 2r\pi)).$

On calcule la première racine en posant r = 0

$\therefore\ z_1 = 2 (\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}) = 2 (\cos 36° + i \sin 36°)$



La mesure de l'angle au centre entre deux racines consécutives est $\frac{360}{5} = 72°$

$z_2 = 2 (\cos (36° + 72°) + i \sin (36° + 72°)) = 2 (\cos 108° + i \sin 108°)$

$z_3 = 2 (\cos (36° + 72°) + i \sin (36° + 2 \times 72°)) = 2 (\cos 180° + i \sin 180°)$

$z_4 = 2 (\cos (36° + 3\times72°) + i \sin (36° + 3 \times 72°)) = 2 (\cos 252° + i \sin 252°)$

$= 2 (\cos (- 108°) + i \sin (- 108°))$

$z_5 = 2\,(\cos(36° + 4 \times 72°) + i \sin(36° + 4 \times 72°)) = 2\,(\cos 324° + i \sin 324°)$

$= 2\,(\cos -36° + i \sin - 36°)$

Essayez de résoudre

4) Représenter sur le plan d'Argand les racines sixièmes du nombre 1

Exemple

5) Trouver les racines carrées du nombre 3 + 4 i

Solution

Soit $(3 + 4i)^{\frac{1}{2}} = x + y\,i$ En élevant les deux membres au carré

$\therefore\ 3 + 4i = x^2 - y^2 + 2\,x\,y\,i$

$\therefore\ x^2 - y^2 = 3 \longrightarrow$ **(1)** et $2\,x\,y = 4 \longrightarrow$ **(2)**

En élevant **(1)** et **(2)** au carré puis additionnant

$\therefore\ x^4 - 2\,x^2\,y^2 + y^4 + 4x^2\,y^2 = 9 + 16$ $\qquad \therefore\ x^4 + 2x^2\,y^2 + y^4 = 25$

$\therefore\ (x^2 + y^2)^2 = 25$ $\qquad \therefore\ (x^2 + y^2) = 5$ **(3)**

En additionnant **(1)** et **(2)** : $2\,x^2 = 8$ d'où $x = \pm\,2$ pour $x = 2$ en (1) on obtient $y = 1$

$\therefore$ La première racine est $2 + i$ et la deuxième racine est $-2 - i$

Essayez de résoudre

5) Trouver sous la forme trigonométrique les racines carrées du nombre $\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$

Exemple

6) Trouver dans $\mathbb{C}$, l'ensemble solution de l'équation $(1 - i)\,x^2 - (3 - i)\,x + 4 - 2\,i = 0$

Solution

Nous pouvons mettre l'équation sous la forme :

$$x^2 - \frac{3 - i}{1 - i}\,x + \frac{4 - 2i}{1 - i} = 0$$

$$\because\ \frac{3 - i}{1 - i} = \frac{(3 - i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{3 + 2\,i + 1}{1 + 1} = \frac{4 + 2\,i}{2} = 2 + i$$

$$\because\ \frac{4 - 2i}{1 - i} = \frac{(4 - 2i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{4 + 2\,i + 2}{1+1} = \frac{6 + 2\,i}{2} = 3 + i$$

$\therefore$ L'équation sous la forme la plus simple est $x^2 - (2 + i)\,x + 3 + i = 0$

En utilisant la formule générale de la résolution d'une équation du second degré

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{(2 + i) \pm \sqrt{(2 + i)^2 - 4(3 + i)}}{2} = \frac{(2 + i) \pm \sqrt{4 + 4i - 1 - 12 - 4i}}{2}$$

$$= \frac{(2 + i) \pm \sqrt{-9}}{2} = \frac{(2 + i) \pm 3i}{2}$$

La première racine = $\frac{2 + i + 3i}{2}$ = 1 + 2i La deuxième racine = $\frac{2 + i - 3i}{2}$ = 1 - i

∴ L'ensemble solution est = {1 + 2i , 1 - i}

Essayez de résoudre

6 Trouver dans $\mathbb{C}$, l'ensemble solution de l'équation $x^2 + (1 + i)\,x - 6 + 3i = 0$

Exercises 2 - 2

1 En utilisant le théorème de Moivre, démontrer les identités suivantes :

a $\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$ b $\sin 5\theta = 16\sin^5\theta - 20\sin^3\theta + 5\sin\theta$

2 Trouver dans $\mathbb{C}$, l'ensemble solution de chacune des équations suivantes puis écrire les racines sous la forme x + y i:

a $z^4 = 16$ b $z^3 + 8 = 0$ c $z^3 + 8i = 0$

3 Trouver l'ensemble solution de l'équation $z^5 + 243 = 0$ où $z \in \mathbb{C}$

4 Trouver l'ensemble solution de l'équation $z^4 = 2 + 2\sqrt{3}\,i$ Écrire la solution sous la forme exponentielle.

5 Trouver les racines cubiques de chacun des nombres suivants :

a $2 - 2\sqrt{3}\,i$ b $1 - i$ c $8i$ d $3 + 4i$ e $5 - 12i$

6 Trouver les racines cubiques du nombre 8 puis représenter ces racines sur le plan d'Argand.

7 Trouver les racines quatrièmes du nombre −1 puis représenter ces racines sur le plan d'Argand.

8 Si $\frac{7 - 11i}{4 + i} = a + b\,i$, trouver la valeur de $(\sqrt{-b} + a\,i)^{\frac{3}{2}}$

9 Mettre le nombre $2\sqrt{2}\,(1 + i)$ sous la forme trigonométrique puis trouver ses racines carrées sous la forme exponentielle.

10 Si $z = 8 - 6i$ trouver $z^{\frac{3}{2}}$ sous la forme algébrique.

11 **Réflexion créative :** Démontrer que $\cos^4\theta = \frac{1}{8}(\cos 4\theta + 4\cos(2\theta + 3))$

Racines cubiques de l'unité

Unité (2)

2 - 3

Travail Coopératif :

En utilisant le théorème de Moivre, trouver l'ensemble solution de l'équation $z^3 = 1$

Trouver les racines précédentes sous la forme algébrique.

Trouver l'ensemble des trois racines. Que remarquez-vous ?

À apprendre

Racines cubiques de l'unité

En utilisant le théorème de Moivre on trouve que l'ensemble solution de l'équation $z^3 = 1$ est :

$$1 \; ; \; -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \; ; \; \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$

Le carré de l'une des deux racines complexes est égal à l'autre racine. Par conséquent, nous pouvons écrire les racine cubiques de l'unité sur la forme 1 , ω et ω^2 où $\omega = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$, $\omega^2 = -\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2} i$

Réflexion critique :

Est-il possible de trouver les racines cubiques de l'unité en utilisant la forme algébrique du nombre complexe ?

Propriétés des racines cubiques de l'unité :

Si 1 , ω et ω^2 sont les racines cubiques de l'unité, alors

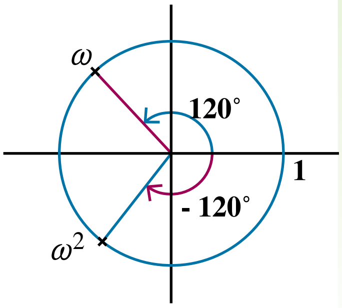
1- $1 + \omega + \omega^2 = 0$ (la somme des racines = 0)

$(1 + \omega = -\omega^2 \, , \; 1 + \omega^2 = -\omega \, , \; \omega + \omega^2 = -1)$

2- $\omega^3 = 1$

$(\frac{1}{\omega} = \omega^2 \, , \frac{1}{\omega^2} = \omega)$

3- Les points représentant les racines cubiques de l'unité sont situés sur un cercle ayant pour centre le point d'origine et de rayon 1. Ces points sont les sommets d'un triangle équilatéral.



4- $(\omega - \omega^2) = \pm\sqrt{3}\, i \, , (\omega^2 - \omega) = \pm \sqrt{3}\, i$

A apprendre

- Racines cubiques de l'unité.
- Propriétés des racines cubiques de l'unité.
- Représenter les racines cubiques de l'unité géométriquement.
- Le conjugué de $a + \omega$ et de $a\,i + \omega$.

Expressions de base

- Racine
- Racine carrée
- Racine cubique
- Cercle de l'unité
- Conjugué

Matériel utilisé

- Calculatrice scientifique
- Logiciels de graphisme

Exemple

1 Si 1 , ω et ω^2 , sont les racines cubiques de l'unité, trouver la valeur de :

a $5 + 5\omega + 5\omega^2$

b $(1 - \frac{2}{\omega} - \frac{2}{\omega^2})(3 + 5\omega + 5\omega^2)$

Solution

a L'expression $= 5(1 + \omega + \omega^2)$ En prenant 5 comme facteur commun

$= 5 \times 0 = 0$

b L'expression $= (1 - \frac{2}{\omega} - \frac{2}{\omega^2})(3 + 5\omega + 5\omega^2)$ put $\frac{1}{\omega} = \omega^2 . \frac{1}{\omega^2} = \omega$

$= (1 - 2\omega^2 - 2\omega)(3 + 5\omega + 5\omega^2) = (1 - 2(\omega^2 + \omega))(3 + 5(\omega + \omega^2))$

$= (1 - 2(-1))(3 + 5(-1)) = (1 + 2)(3 - 5) = -6$

Essayez de résoudre

1 Si 1 , ω et ω^2 sont les racines cubiques de l'unité, trouver la valeur de :

a $(2 + 5\omega + 2\omega^2)^5$

b $(\omega + \frac{1}{\omega})^2 (\omega^2 + \frac{1}{\omega^2})^3$

Exemple

2 Démontrer que $\left[\frac{5 - 3\omega^2}{5\omega - 3} - \frac{2 - 7\omega}{2\omega^2 - 7}\right]^4 = 9$

Solution

L'expression $= \left[\frac{5 - 3\omega^2}{5\omega - 3} - \frac{2 - 7\omega}{2\omega^2 - 7}\right]^4 = \left[\frac{5\omega^3 - 3\omega^2}{5\omega - 3} - \frac{2\omega^3 - 7\omega}{2\omega^2 - 7}\right]^4$

$= \left[\frac{\omega^2(5\omega - 3)}{5\omega - 3} - \frac{\omega(2\omega^2 - 7)}{2\omega^2 - 7}\right]^4 = [\omega^2 - \omega]^4 = [\pm\sqrt{3}\, i]^4 = 9$

Essayez de résoudre

2 Démontrer que $\left[\frac{a + \omega b - \omega^2 c}{\omega^2 a + b + c\omega} - \frac{c + a\omega^2 - b\omega}{\omega c + b\omega^2 + a}\right]^8 = 81$

Exemple

3 Démontrer que $x = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$ est l'une des racines de l'équation $x^{10} + x^5 + 1 = 0$

Solution

a $x = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{3}\, i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

x représente l'une des racines cubiques de l'unité

Si $x = \omega$, alors $\omega^{10} + \omega^5 + 1 = \omega^1 + \omega^2 + 1 = 0$

Essayez de résoudre

3) Former une équation du second degré dont les racines sont $(1 + \omega - \omega^2)^3$, $(1 - \omega + \omega^2)^3$

Exercises 3 - 2

Si 1 , ω et ω^2 sont les racines cubiques de l'unité :

Compléter ce qui suit :

1) $(2 + 5\omega + 2\omega^2)^2 =$ ....

2) $(\omega - \omega^2)^4 =$ ....

3) $(\omega + \frac{1}{\omega})^2 (\omega^2 + \frac{1}{\omega^2})^2 =$ ....

4) Si $x = \frac{-1 + \sqrt{3}\, i}{2}$ alors $x^8 + x^4 =$ ....

5) $(\frac{1}{\omega + 2})(1 + \omega - \frac{3}{\omega}) =$ ....

6) $1 + 3\omega + 3\omega^2 =$ ....

7) Si $a = 2\omega - 3\omega^2$ et $b = 3 + 5\omega^2$ alors $a^2 + b^2 =$ ....

8) $\sum_{r=1}^{5} \omega^r =$ ....

Choisir la bonne réponse parmi les réponses proposées :

9) Le conjugué du nombre ω est égal à ....

a) ω b) ω^2 c) 1 d) $-\omega$

10) $(\omega^2 + \frac{1}{\omega})(1 + \frac{1}{\omega^2})^2 =$ ....

a) 2 b) 0 c) - 3 d) - 5

11) $(a + b\omega + a\omega^2)(a + b\omega^2 + a\omega^4) =$ ....

a) 1 b) $a - b$ c) $(a - b)^2$ d) $b^2 - a^2$

12) $(1 + 2\omega^5 + \frac{1}{\omega^2})(1 + 2\omega + \frac{1}{\omega^4}) =$ ....

a) 0 b) 1 c) - 1 d) 2

13) $\frac{a - d\omega}{a\omega^2 - d} - \omega^2 =$ ....

a) 3i b) $\pm\sqrt{3}\, i$ c) - 3 d) 3

14) Si $(1 + \omega)^7 = a + b\omega$ où a et b sont deux nombres réels, alors (a , b) = ...

a) (0 , - 1) b) (1 , 1) c) (0 , 1) d) (1 , - 1)

15) Si $(1 + \omega^2)^n = (1 + \omega^2)^n$ alors la plus petite valeur entière positive de n est ....

a) 2 b) 3 c) 5 d) 6

16) $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \ldots + \omega^{100} =$ ....

a) 0 b) 1 c) ω d) $-\omega^2$

17 Si z $= \omega^x$ alors $|z| =$ .... où x est un nombre entier positif

a 1 b ω c x d ω^2

18 $\sum_{r=1}^{6} 1 + \omega^r =$ ....

a 0 b 6 c 1 d $1 + \omega$

19 Démontrer les identités suivantes :

a $(1 - \omega + \omega^2)(1 - \omega^2 + \omega^4)(1 - \omega^4 + \omega^8)(1 - \omega^8 + \omega^{16}) = 2^4$

b $\left(\frac{\omega}{1 + 2\omega}\right)2 + \left(\frac{1 + 2\omega^2}{\omega^2}\right)^2 = \frac{-10}{3}\omega^2$

c $\left[\frac{1}{1 + \omega i} - \frac{\omega + i}{1 + \omega^2 i}\right]^8 = 16$

d $\left[\frac{5 - 3\omega^2}{5\omega - 3} - \frac{2 - 7\omega}{2\omega^2 - 7}\right]^2 = -3$

e $(1 + \omega^2)^8 = \omega^2$

f $(1 - \omega^2 + \omega^4)^2 + (1 + \omega^2 + \omega^4)^2 = 4\omega$

20 Trouver la valeur de :

a $5 + 3\omega + 3\omega^2$

b $(1 + \omega + 2\omega^2)^2 + (1 + 2\omega + \omega^2)^2$

c $\frac{\omega^2(\omega - 1)(\omega^2 - 1)}{(2\omega + 1)(\omega^2 + 2)}$

d $\left[\frac{1}{1 + 3\omega^2} - \frac{1}{1 + 3\omega}\right]^2$

e $\left(1 + \frac{1}{\omega} + i\right)\left(1 + \frac{1}{\omega^2} + i\right)$

21 Si $x = \frac{-1 + \sqrt{3}\, i}{2}$ démontrer que $x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x = 0$ Trouver ensuite les racines carrées du nombre x.

22 Si $\frac{1}{1 + \omega}$ et $\frac{1}{1 + \omega^2}$ sont les racines d'une équation du second degré, trouver cette équation .

23 Si $Z = 2(\omega + i)(\omega^2 + i)$ trouver les différentes formes du nombre z puis trouver les racines carrées du nombre z sous la forme trigonométrique.

24 **Réflexion créative :** Trouver la valeur de n tel que $(2 + 5\omega + 2\omega^2)^n = (2 + 2\omega + 5\omega^2)^n$

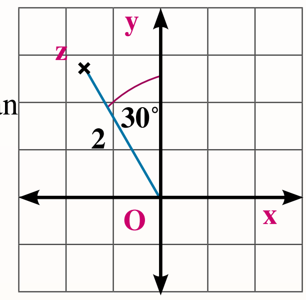
25 Trouver ensuite : a $\sum_{r=0}^{10} \omega^r$ b $\sum_{r=0}^{10} (1 + \omega^r + \omega^{2r})$

Exercices généraux

Compléter ce qui suit:

1) Si $z = \dfrac{2 + i}{2 - i}$ alors $|z| =$ ....

2) La forme trigonométrique du nombre z représenté dans le plan d'Argand ci-contre est ....



3) Si $z = \sin\theta - i\cos\theta$ alors l'argument de z est égal à ....

4) Le conjugué du nombre $i + \omega^2$ est ....

5) $1 + 2\omega + 2\omega^2 =$ ....

6) Si $z_1, z_2, \ldots$ et z_6 représentent les racines cubiques de l'unité dans le plan d'Argand, alors $(z_r \widehat{O} z_{r+1}) =$ .... où $1 \leqslant r \leqslant 5$

Choisir la bonne réponse parmi les réponses proposées :

7) Si la détermination principale du nombre z_1 est θ_1 et la détermination principale du nombre z_2 est θ_2, alors la détermination principale du nombre $z_1 z_2$ est :

a $\theta_1 + \theta_2$ b $\theta_1 \times \theta_2$ c $\theta_1 - \theta_2$ d $\pi - (\theta_1 + \theta_2)$

8) Lequel des nombres suivants représente la forme algébrique du nombre $2 (\cos \dfrac{2\pi}{3} + i \sin \dfrac{2\pi}{3})$:

a $-\sqrt{3} + i$ b $-1 + \sqrt{3}\, i$ c $-\sqrt{2} + \sqrt{2}\, i$ d $-\sqrt{3} - \sqrt{3}\, i$

9) Si le point $(\sqrt{3}, -1)$ représente le nombre complexe z dans le plan d'Argand, alors le module et l'argument du nombre z sont ....

a $(2, \dfrac{\pi}{6})$ b $(2, \dfrac{5\pi}{6})$ c $(\sqrt{2}, -\dfrac{2\pi}{6})$ d $(2, \dfrac{-\pi}{6})$

10) La partie réelle d'un nombre complexe ayant pour module $\sqrt{2}$ et pour argument $\dfrac{7\pi}{6}$ est ....

a $-\sqrt{3}$ b $-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ c $-\dfrac{\sqrt{2}}{6}$ d $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

11) Le conjugué du nombre $1 + \omega$ est

a $1 - \omega$ b $-\omega^2$ c $1 + \omega^2$ d $1 - \omega^2$

12) Les racines cinquièmes de l'unité représentent dans le plan d'Argand les sommets d'un ....

a triangle équilatéral b carré c pentagone régulier d hexagone régulier

13 Si a est un nombre réel, alors le conjugué du nombre $\frac{a^3 + i}{a^2 + ai - 1}$ est ....

a $a - i$ **b** $a + i$ **c** $\frac{a^3 - i}{a^2 - ai - 1}$ **d** $\frac{a^3 + i}{a^2 - ai - 1}$

14 Si $z = (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i)^n$ et si $z = 1$ alors la plus petite valeur de n est = ...

a 9 **b** 6 **c** 3 **d** 1

15 Si $|z| = |z - 2|$ alors la partie réelle du nombre z est égale à = ...

a 1 **b** - 1 **c** - 2 **d** 2

16 $e^{\theta i} + e^{-\theta i} =$ ....

a $e^{2\theta i}$ **b** $2\cos\theta$ **c** $2\sin\theta$ **d** $e^{-2\theta i}$

17 Si $|z| = 10$ alors $z\bar{z} =$ ....

a 10 **b** 100 **c** 1 **d** - 100

18 Mettre chacun des nombres suivants sous la forme $x + yi$:

a $(\cos\frac{3\pi}{11} + i\sin\frac{3\pi}{11})(\cos\frac{8\pi}{11} + i\sin\frac{8\pi}{11})$

b $3(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}) \times \sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3})$

c $\dfrac{\sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})}{\frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})}$

19 Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes tels que $z_1 = -9 + 3\sqrt{3}\,i$, $|z_2| = \sqrt{3}$, l'argument de $z_2 = \frac{7\pi}{12}$, trouver chacun des nombres complexes suivants sous la forme $\ell(\cos\theta + i\sin\theta)$ où $-\pi < \theta \geqslant \pi$

a z_1 **b** z_2 **c** $z_1 z_2$ **d** $\frac{z_1}{z_2}$

20 Exprimer chacun des nombres suivants sous la forme exponentielle :

a $z_1 = 7$ **b** $z_2 = -5i$ **c** $z_3 = \frac{1}{2}(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$

d $z_4 = \frac{7}{2 + \sqrt{3}\,i}$ **e** $z_5 = -4(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6})$

21 Si $\theta \in]-\pi, \pi]$ trouver le module et l'argument du nombre $z = 1 + \cos\theta + i\sin\theta$

22 Si $z = \frac{(1 + i)(2 - i)}{(1 - i)(3 + i)}$ trouver $|z|$

23 **Réflexion créative :** Utiliser les nombres complexes pour démontrer les relations suivantes :

$$\tan^{-1}(\sqrt{3}) + \tan^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{\pi}{2}$$

Résumé de l'unité

Nombre complexe Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, le nombre de la forme $z = x + y\,i$ est appelé "nombre complexe" de partie réelle x et de partie imaginaire y où $i^2 = -1$

Conjugué d'un nombre complexe : est un nombre complexe, alors son conjugué est le nombre $\overline{z} = x - y\,i$. On a : $z + \overline{z}$ est un nombre réel et $z\,\overline{z}$ est également un nombre réel

Propriétés du nombre conjugué :

1) $(\overline{z_1 + z_1}) = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ **2)** $(\overline{z_1\, z_1}) = (\overline{z_1})(\overline{z_2})$ **3)** $(\overline{\frac{z_1}{z_2}}) = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

Représentation géométrique d'un nombre complexe : Un nombre $z = x + y\,i$ est représenté par le point dans le plan d'Argand.

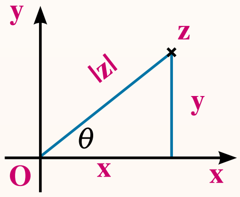
Module et argument d'un nombre complexe : Si le point $(x\,,\,y)$ représente le nombre complexe z dans le plan d'Argand, alors $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. L'argument de z est déterminé par les deux relations $\cos\theta = \frac{x}{r}$ et $\sin\theta = \frac{y}{r}$.

Propriétés du module et de l'argument d'un nombre complexe

1) $|z| = |\overline{z}|$ **2)** $z\,\overline{z} = |z|^2$

3) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ **4)** $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

5) $|z_1 + z_2| \geqslant |z_1| + |z_2|$



6) L'argument d'un nombre complexe peut prendre une infinité de valeurs en ajoutant un nombre entier de tours 2π.

7) L'argument qui appartient à l'intervalle $]-\pi\,,\,\pi]$ est appelé la détermination principale de l'argument du nombre complexe .

8) L'argument de $\overline{z}$ = L'argument de z

9) L'argument de (- z) = - (L'argument de z)

10) L'argument de $\frac{1}{z}$ = (L'argument de z)

Forme trigonométrique d'un nombre complexe : C'est $z = 1\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ où $1 = |z|$ et θ est appelé la détermination principale de l'argument de z

Multiplication et division de deux nombres complexes :

Si $z_1 = \ell_1\,(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ et $z_2 = \ell_2\,(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ alors:

$$z_1\, z_2 = \ell_1\, \ell_2\, (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\ell_1}{\ell_2}\, (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\,]$$

Forme exponentielle d'un nombre complexe (forme d'Euler) : Si z est un nombre complexe de module 1 et d'argument θ , alors :
$z = \ell e^{\theta i}$ où θ est mesuré en radians.

Développement d'Euler pour les fonctions sin x | cos x et e^x :

$$\sin x = \frac{x}{1i} - \frac{x^3}{3i} + \frac{x^5}{5i} - \dots + (-1)^{n-1} \times \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)i} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2i} + \frac{x^4}{4i} - \frac{x^6}{6i} + (-1)^{n-1} \times \frac{x^{2n-2}}{(2n-1)i}$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1i} + \frac{x^2}{2i} + \frac{x^3}{3i} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)i} + \dots$$

Théorème de Moivre : Si n est un nombre entier positif, alors :

1) $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$

2) Si k est un nombre positif, alors $(\cos\theta + i\sin\theta)^{\frac{1}{k}} = \cos\frac{\theta + 2r\pi}{k} + i\sin\frac{\theta + 2r\pi}{k}$

donc l'expression $(\cos\theta + i\sin\theta)^{\frac{1}{k}}$ aprend plusieurs valeurs suivant les valeurs de r. Le nombre de ces différentes valeurs est égal à k. On obtient ces valeurs en posant r = ... , - 2 , - 1 , 0 , 1 , 2 .... Ces valeurs rendent l'argument $\frac{\theta + 2r\pi}{k}$ compris entre $-\pi, \pi$

Racines cubiques de l'unité : Si $Z^3 = 1$ alors $Z = 1 , -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i , -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$
et ces racines sont notés $1, \omega, \omega^2$

où $\omega = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$, $\omega^2 = -\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2} i$

Propriétés des racines cubiques de l'unité :

(1) $\omega^3 = 1$ (2) $1 + \omega + \omega^2 = 0$ (3) $\omega^2 - \omega = \pm\sqrt{3}\, i$

Racines nièmes de l'unité : si $Z^n = 1$

alors $(\cos 0° + i \sin 0°)^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}$ où $k \in \mathbf{y}$, $\frac{2\pi k}{n} \in]-\pi, \pi]$

Les racines nièmes de l'unité sont représentées dans le plan d'Argand par les sommets d'un polygone régulier de n sommets situés sur un cercle ayant pour centre le point d'origine et pour rayon l'unité.

Pour plus d'activités, visiter le site : www.sec3mathematics.com.eg

Épreuve cumulative

1 Déterminer le quadrant dans lequel se situe l'angle θ dans chacun des cas suivants :

a $\cos\theta < 0 , \sin\theta < 0$ **b** $\cos\theta > 0 , \sin\theta > 0$

c $\cos\theta < 0 , \sin\theta < 0$

2 Trouver la somme et le produit des racines de l'équation $x^2 - 3x + 1 = 0$

3 Trouver le module et l'argument de chacun des nombres complexes suivants :

a $z = \sqrt{3} + i$ **b** $z_2 = -1 + i$ **c** $z_3 = 4i$

d $z_4 = -5$ **e** $x_5 = 3 - 4i$

4 Mettre sous la forme la plus simple le nombre $z = \dfrac{1 + 4i + i^2}{2 - i - 2i^2 - i^3}$ puis trouver les racines carrées du nombre z sous la forme trigonométrique.

5 Si z est un nombre complexe, trouver l'ensemble solution de l'équation $z - 3\overline{z} = 5 + 10i$

6 Si $z = 4 + 4\sqrt{3}\,i$ trouver la forme exponentielle du nombre z . Trouver ensuite les racines cubiques du nombre z puis les représenter dans le plan d'Argand .

7 Trouver les différentes formes du nombre $z = \dfrac{-\sqrt{3} - i}{\sqrt{3} - i}$, Trouver ensuite les racines carrées du nombre z puis les représenter dans le plan d'Argand.

8 Si $z_1 = \sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{3} - i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ et $z_2 = 2(\sin 30° + i\sin 30°)$

trouver $z_1 z_2$ sous la forme exponentielle puis trouver la forme trigonométrique du nombre z tel que $z = (z_1 z_2)^{\frac{1}{4}}$

9 Mettre le nombre $z = \dfrac{-4}{1 - \sqrt{3}\,i}$ sous la forme trigonométrique puis :

1) démontrer que z^6 est un nombre réel. **2)** démontrer que $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{2} e^{\frac{2\pi}{3} i}$

10 Si $z = e^{\theta i}$ trouver le module et l'argument du nombre $\dfrac{1 + z}{1 - z}$

11 Si $z = \dfrac{-1 + \sqrt{3}\,i}{2}$ et $z_1 = \dfrac{1 + z}{1 - z}$ trouver le nombre z_1 et ses racines carrées sous la forme trigonométrique.

12 Démontrer que :

a $\left(1 - \dfrac{2}{\omega^2} + \omega^2\right)\left(1 + \omega - \dfrac{5}{\omega}\right) = 18$

b $\dfrac{3 + 5\omega + 3\omega^2}{1 - 2\omega - 4\omega^2} + \dfrac{3 + 5\omega^2 + 3\omega}{1 - 2\omega^2 - 4\omega} = \dfrac{-2}{19}$

[I] Algèbre

Unité (3)

Déterminants et Matrices

Introduction de l'unité

Les matrices sont considérées comme l'un des outils les plus importants utilisés dans toutes les branches mathématiques notamment en algèbre linéaire. Les matrices est un concept mathématique qui a un rôle important dans la plupart des domaines de la connaissance. Les matrices ont été découvertes par les anciens Chinois puis utilisées, régulièrement, par le savant Kelly (1821- 1895) qui les a organisées en systèmes sous forme de colonnes et de lignes. Les matrices sont utilisées actuellement par les spécialistes en économie, en sociologie et en psychologie en plus du rôle important qu'elles jouent en mathématiques et ses applications en physiques, chimie et les autres sciences appliquées. Concernant les déterminants qui représentent les valeurs arithmétiques des matrices carrées, ils ont été utilisés par le savant Japonais Sekikowa en 1683, dans la résolution des équations linéaires, puis cette science a été développée par des scientifiques pour la résolution des équations linéaires et dans d'autres applications dans différentes disciplines.

Objectifs de l'unité

Après l'étude de l'unité, et après avoir réalisé les activités, il est attendu que l'élève soit capable de:

- déduire les propriétés des déterminants
- résoudre des problèmes variés en utilisant les propriétés des déterminants
- déterminer l'inverse d'une matrice carrée d'ordre 3 en utilisant la matrice des coefficients correspondants
- résoudre des équations linéaires en utilisant l'inverse d'une matrice
- Identifier les équations linéaires homogènes et non homogènes
- déterminer le rang d'une matrice de coefficients et le rang d'une matrice des coefficients élargie
- déduire la relation entre le rang d'une matrice de coefficients et le rang d'une matrice des coefficients élargie et la possibilités de résolution

Expressions de base

- *Déterminant*
- *Déterminant de deuxième degré*
- *Déterminant de troisième degré*
- *Ligne*
- *Déterminant*
- *Matrice*
- *Élément*
- *Rang*
- *Matrice ligne*
- *Matrice colonne*
- *Matrice carrée*
- *Matrice nulle*
- *Matrices égales*
- *Rang d'une matrice*
- *Matrice élargie*
- *Équation homogène*
- *Équation non homogène*
- *Matrice adjointe*
- *Matrice des coefficients*
- *Équation linéaire*

Matériel utilisé

- *Calculatrice scientifique*

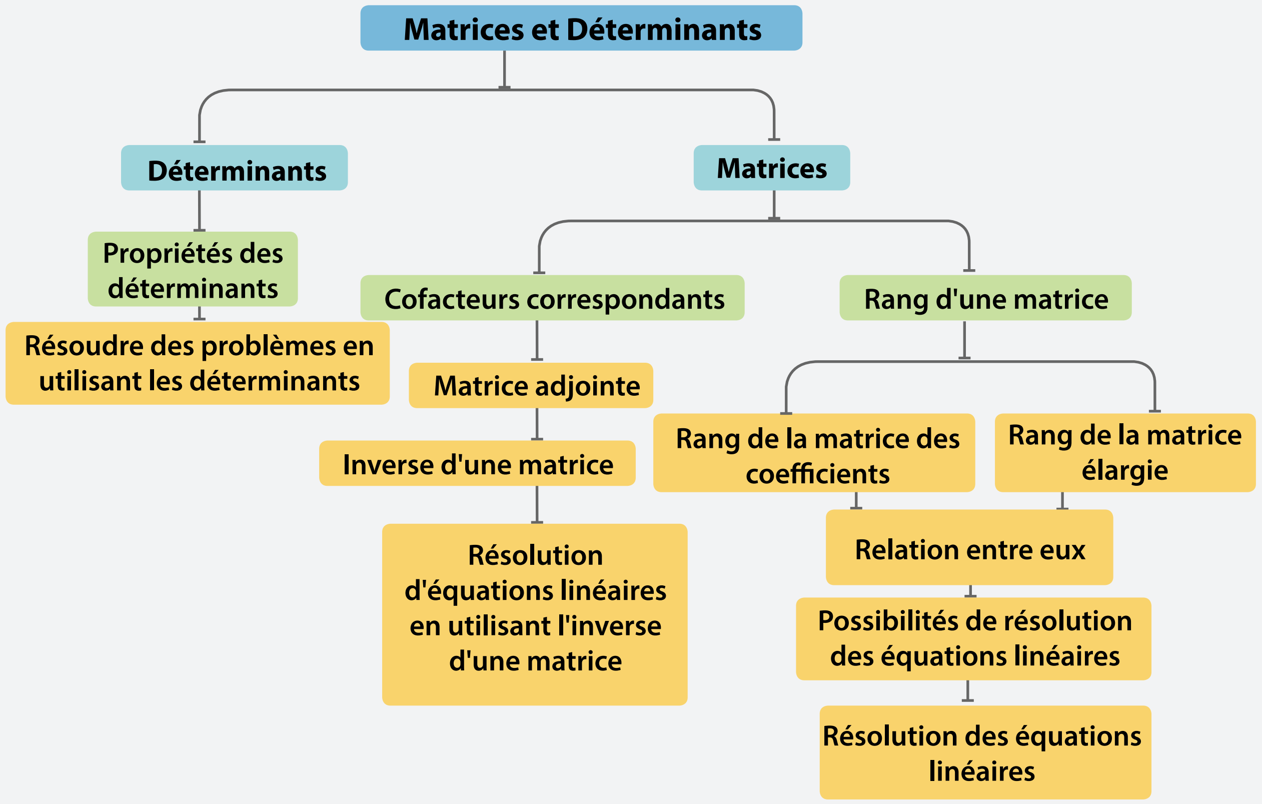
Leçons de l'unité

Leçon (3 – 1): Déterminants

Leçon (3 – 2): Matrices

Leçon (3 – 3): Résolution d'un système d'équations linéaires en utilisant l'inverse d'une matrice

Organigramme de l'unité



Unité (3)

3 - 1 Déterminants

A apprendre

- *Propriétés des déterminants.*
- *Résolution d'équations variées en utilisant les propriétés des déterminants.*

Expressions de base

- *Déterminant*
- *Déterminant du second degré*
- *Déterminant du troisième degré*
- *Ligne*
- *Colonne*
- *Diagonale principale*
- *Forme triangulaire*

Matériel utilisé

- *Calculatrice scientifique*

Introduction

Vous avez déjà étudié les matrices et les déterminants. Chaque matrice carrée admet un déterminant. Un déterminant 2×2 est appelé déterminant du second degré. Un déterminant 3×3 est appelé déterminant du troisième degré etc.

Vous savez également comment calculer la valeur d'un déterminant.

Par exemple: $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$

La valeur du déterminant $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} = 3 \times 6 - 4\,(-5) = 38$

Vous avez également appris comment calculer la valeur du

déterminant $\begin{vmatrix} a & d & x \\ b & e & y \\ c & f & z \end{vmatrix}$

En utilisant les cofacteurs correspondants. Si on note Δ la valeur du déterminant, On a Δ

alors $\Delta = a \begin{vmatrix} e & y \\ f & z \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} b & y \\ c & z \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} b & e \\ c & f \end{vmatrix}$ **En utilisant les éléments de la première ligne**

Réfléchir et discuter

1 Si $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$, alors $\Delta_1 =$ ....

2 Si $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$, alors $\Delta_2 =$ ....

3 Quelle est la relation entre Δ_1 et Δ_2? sont-ils égaux ? Justifier votre réponse.

4 Quelle est la relation entre les lignes de Δ_1 et les colonnes de Δ_2?

A apprendre

Propriétés de base des déterminants

Propriétés (1)

> La valeur d'un déterminant ne change pas quand on remplace les lignes par les colonnes correspondantes

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & c_{13} \\ a_{21} & b_{22} & c_{23} \\ a_{31} & b_{32} & c_{33} \end{vmatrix}$$

Nous pouvons démontrer cette propriété en développant les deux déterminants.

Exemple

1 Démontrer que $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ -2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 5 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

Solution

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ -2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 2\,(0 - 20) + 3(2 + 8) - (5 - 0) = -15$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 5 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 2\,(0 - 20) - (-6 + 5) - 2(-12, -0) = -15$$

Donc : $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ -2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 5 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

Essayez de résoudre

1 Démontrer que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

Propriétés (2)

La valeur d'un déterminant ne change pas si on le développe selon n'importe quelle ligne ou colonne.

Exemple

2 Trouver la valeur de $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 5 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ en utilisant les éléments de la première colonne puis en utilisant les éléments de la première ligne.

Solution

a) En utilisant les éléments de la première colonne:

$$\triangle = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = (0 + 3) + 5(6 + 4) = 53$$

b) En utilisant les éléments de la première ligne:

$$\triangle = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} -2 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = (0 + 3) -2(0 -15) - (0 - 20) = 3 + 30 + 20 = 53$$

Essayez de résoudre

2) Trouver la valeur de $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ en utilisant les éléments de la première ligne puis en utilisant les éléments de la première colonne

Propriétés (3)

La valeur d'un déterminant s'annule dans chacun des cas suivants :

1) Si tous les éléments d'une ligne (respectivement une colonne) d'un déterminant sont nuls, la valeur du déterminant s'annule = 0

La valeur du déterminant $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$

Nous pouvons démontrer que la valeur du déterminant s'annule en le développant à l'aide des éléments de la deuxième ligne. On obtient $\triangle = 0$

2) Si les éléments correspondants de deux lignes (respectivement deux colonnes) d'un déterminant sont égaux, la valeur du déterminant s'annule. = 0

i.e. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$

Cela est dû à l'égalité des éléments correspondants des deux premières lignes. (Démontrer ce résultat)

Exemple

3) Sans développer le déterminant, démontrer que $\begin{vmatrix} 1 & -5 & 8 \\ 3 & 7 & 9 \\ 1 & -5 & 8 \end{vmatrix} = 0$

Solution

Dans le déterminant, on trouve que $L_3 = L_1$ $\therefore$ la valeur du déterminant $= 0$

Essayez de résoudre

(3) Sans développer le déterminant, démontrer que $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ -1 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 0$

Propriétés (4)

Si on multiplie tous les éléments d'une ligne d'un déterminant (respectivement d'une colonne) par un même nombre réel, alors le déterminant obtenu est égal au déterminant initial multiplié par ce nombre.

Exemple

(4) Sans développer le déterminant, trouver la valeur de $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -7 \\ 4 & 6 & 2 \\ 10 & 15 & 5 \end{vmatrix}$

Solution

Sans développer le déterminant, trouver la valeur de L_2 et 5 comme facteur commun de L_3 on obtient

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -7 \\ 4 & 6 & 2 \\ 10 & 15 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times 5 \begin{vmatrix} 3 & 2 & -7 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 10 \times 0 = 0$$

Le zéro est obtenu car les éléments correspondants de L_2 et L_3 sont égaux. (Essayer de démontrer ce résultat d'une autre manière)

Essayez de résoudre

(4) Si $\begin{vmatrix} a & d & m \\ b & e & n \\ c & f & z \end{vmatrix} = 10$ Trouver la valeur de $\begin{vmatrix} 2a & 2d & 2m \\ b & e & n \\ -4c & -4f & -4z \end{vmatrix}$

Propriétés (5)

Si on intervertit les éléments de deux lignes d'un déterminant (respectivement deux colonnes) le déterminant se change en son opposé.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

En intervertissant la deuxième ligne et la troisième ligne ce qui s'écrit "intervertir L_2 et L_3

Exemple

5 Sans développer le déterminant, démontrer que : $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 5 & 7 & 6 \end{vmatrix} = 0$

Solution

En intervertissant la première ligne et la deuxième ligne dans le premier déterminant

$$\therefore\ -\begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 5 & 7 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 5 & 7 & 6 \end{vmatrix} = -\triangle + \triangle = 0$$

Propriétés (6)

Si dans un déterminant, une ligne (respectivement une colonne) peut être exprimée comme somme de deux lignes (respectivement deux colonne), alors le déterminant est égal à la somme de deux déterminants

$$\begin{vmatrix} c_{11}+m & a_{12} & a_{31} \\ c_{21}+n & a_{22} & a_{23} \\ c_{31}+h & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m & c_{12} & c_{13} \\ n & c_{22} & c_{23} \\ h & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}$$

Nous pouvons démontrer cette propriété en développant les déterminants

Exemple

6 Sans développer le déterminant, démontrer que : $\begin{vmatrix} \ell & m & n \\ -x & y & z \\ f & k & r \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\ell & m & n \\ x & y & z \\ -f & k & r \end{vmatrix} = 0$

Solution

Nous pouvons écrire un déterminant de valeur égale à la somme des valeurs des deux déterminants du membre de gauche.

En remarquant que les deux déterminants du membre de gauche, ont les mêmes éléments dans les colonnes C_2 et C_3 et on additionnant:

$$\text{Membre de gauche} = \begin{vmatrix} \ell-\ell & m & n \\ -x+x & y & z \\ f-f & k & r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & m & n \\ 0 & y & z \\ 0 & k & r \end{vmatrix} = 0$$

(Car les éléments de C_1 dans le déterminant de la somme sont des zéros)

Réflexion créative: Est-il possible d'utiliser d'autres méthodes pour trouver la valeur d'un déterminant sans le développer ? Citer l'une de ces méthodes.

Essayez de résoudre

(5) Trouver $M = M_1 + M_2 + M_3$ Si

$$M_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}, \quad M_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Propriétés (7)

Si on ajoute aux éléments d'une ligne d'un déterminant (respectivement une colonne) le produit des éléments correspondants d'une autre ligne (respectivement une autre colonne) par un nombre réel, la valeur du déterminant reste inchangée.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + ka_2 & b_1 + k\,b_2 & c_1 + k\,c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Nous avons ajouté aux éléments de la première ligne les éléments correspondants de la deuxième ligne multipliés par m. Cette opération est notée $L_1 + L_2$. Nous pouvons démontrer cette propriété en subdivisant les éléments de la première ligne du déterminant du membre de droite, suivant la propriété précédente, en somme de deux déterminants dont l'un est le déterminant de l'autre membre et l'autre a pour valeur zéro.

Exemple

(7) Sans développer le déterminant, trouver la valeur de : $\begin{vmatrix} 3 & 8 & 12 \\ 9 & 21 & 27 \\ 20 & 44 & 52 \end{vmatrix}$

Solution

En multipliant les éléments de la première colonne par –2 puis les ajoutant aux éléments correspondants de la deuxième colonne

M'est dire : $-2C_1 + C_2$ **et aussi :** $-2C_1 + C_3$

$$\begin{vmatrix} 3 & 8 & 12 \\ 9 & 21 & 27 \\ 20 & 44 & 52 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 8 - 2\times 3 & 12 - 2\times 3 \\ 9 & 21 - 2\times 9 & 27 - 2\times 9 \\ 20 & 44 - 2\times 20 & 52 - 2\times 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 9 & 3 & 9 \\ 20 & 4 & 12 \end{vmatrix}$$

Nous remarquons ici que les éléments de la troisième colonne sont des multiples des éléments de la deuxième colonne.

$\therefore$ La valeur du déterminant $= 0$

Essayez de résoudre

(6) Sans développer le déterminant, trouver la valeur de $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -7 \\ -3 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix}$

Propriétés (8)

Dans un déterminant, la somme des produits des éléments d'une ligne (respectivement une colonne) par le cofacteur des éléments correspondants d'une autre ligne (respectivement une autre colonne) est nulle.

Dans le déterminant $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Les éléments de la première ligne sont a_{11} , a_{12} , a_{13} et les cofacteurs correspondants aux éléments de la deuxième ligne sont:

$$(-1)^{2+1} \times M_{21} \quad , \quad (-1)^{2+2} \times M_{22} \quad , \quad (-1)^{2+3} \times M_{23}$$

$$\text{Le déterminant} = -a_{11}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{13}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \qquad \textbf{(car : } L_1 = L_2\textbf{)}$$

Par exemple: Si $A = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix}$ les éléments de L_1 sont 2, 4 et7

Les cofacteurs correspondants aux éléments de la troisième ligne sont :

$$(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \quad , \quad (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \quad , \quad (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

d'où on a 1(4 + 14) , -1 (2 - 21) , 1 (-4 - 12)

et donc on obtient 18 , 19 et -16

La somme des produits des éléments de L_1 par les cofacteurs correspondants de L_3

$$= 2 \times 18 + 4 \times 19 + 7 \times -16 = 0.$$

Le déterminant sous la forme triangulaire

Si on écrit le déterminant sous l'une des deux formes suivantes, une telle forme est dite triangulaire supérieure respectivement

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{or} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ 0 & a_{22} & c_{32} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}$$

Diagonale principale   Diagonale principale

Dans ce cas, tous les éléments situés au dessus de la diagonale principale sont des zéros comme le montre le premier cas ou tous les éléments situés au dessous de la diagonale principale sont des zéros comme le montre le deuxième cas.

Propriétés (9)

La valeur d'un déterminant triangulaire est égale au produit des éléments de sa diagonale principale.

Exemple

8 Sans développer le déterminant, démontrer que $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a - b)(b - c)(c - a)$

Solution

En multipliant les éléments de la première ligne par –1 et en les ajoutant aux éléments correspondants de chacune des deux lignes suivantes :

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b - a & b^2 - a^2 \\ 0 & c - a & c^2 - a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b - a & (b - a)(b + a) \\ 0 & c - a & (c - a)(c + a) \end{vmatrix}$$

En prenant (b – a) comme facteur commun de la deuxième ligne et (c – a) de la troisième ligne

$$= (b - a)(c - a)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b + a \\ 0 & 1 & c + a \end{vmatrix}$$

En multipliant les éléments de la deuxième ligne par –1 et en les ajoutant aux éléments correspondants de la troisième ligne

$$= (b - a)(c - a)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b + a \\ 0 & 0 & c - b \end{vmatrix}$$

$$= (b - a)(c - a)(c - b)$$

$$= (a - b)(b - c)(c - a)$$

Essayez de résoudre

7 Sans développer le déterminant, démontrer que $\begin{vmatrix} a - b - c & 2b & 2c \\ 2a & b - c - a & 2c \\ 2a & 2b & c - a - b \end{vmatrix} = (a + b + c)^2$

Exercices 1 - 1

Choisir la bonne réponse parmi les réponses proposées:

1. Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{vmatrix} = 12$, alors $\begin{vmatrix} z & x & y \\ f & d & e \\ c & a & b \end{vmatrix} =$

   a) -12 b) -6 c) 6 d) 12

2. Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{vmatrix} = 15$, alors $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ d & e & f \end{vmatrix} =$

   a) -30 b) -15 c) 0 d) 15

3. $\begin{vmatrix} a & a & a \\ a & b & c \\ c & c & c \end{vmatrix} =$

   a) 0 b) ac c) bc d) abc

4. $\begin{vmatrix} ab & a & \frac{1}{c} \\ ac & c & \frac{1}{b} \\ bc & b & \frac{1}{a} \end{vmatrix} =$

   a) 0 b) 1 c) 2 d) 5

5. $\begin{vmatrix} x - y & y - z & z - x \\ y - z & z - x & x - y \\ z - y & x - y & y - z \end{vmatrix} =$

   a) 0 b) x - y c) y-z d) z - x

6. Si $i^2 = -1$, alors $\begin{vmatrix} 1 & i & i + 1 \\ 0 & 1 & i - 1 \\ 0 & i & i \end{vmatrix} =$

   a) 2i - 1 b) 2i + 1 c) i d) 1

7) L'ensemble solution de l'équation $\begin{vmatrix} x & 2x & 3x \\ 3x & 2x & x \\ x & -x & 0 \end{vmatrix} = 96$ dans $\mathbb{R}$ est

a 4   b 3   c 2   d -2

8) Dans un triangle ABC on a $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 5 & 7 & 8 \\ \sin A & \sin B & \sin C \end{vmatrix} =$

a 5a   b 7b   c 8c   d 0

9) Si $n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$, $m = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 9 \\ 4 & 6 & 10 \\ 5 & 20 & 10 \end{vmatrix}$ alors m =

a n   b 10n   c 20n   d 30n

10) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 9 \\ 1 & 0 & -7 \\ -9 & 7 & 0 \end{vmatrix} =$

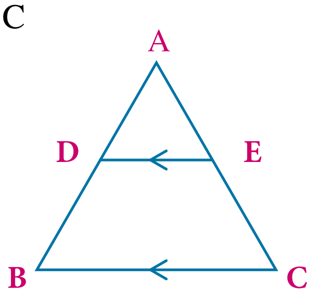
a -9   b -7   c 49   d 0

11) Démontrer que $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = (x - y)(y - z)(z - x)$

Trouver ensuite la valeur numérique du déterminant si $x - y = 5$, $y - z = 7$

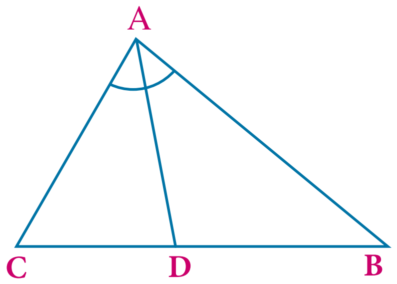
12) **Lien avec la géométrie:** Dans la figure ci-contre $\overline{DE} \mathbin{//} \overline{BC}$

Démontrer que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ DE & AD & AE \\ BC & AB & AC \end{vmatrix} = 0$



13 Dans la figure ci-contre: :

Démontrer que $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ AB & AC & AB+AC \\ BD & DC & BC \end{vmatrix} = 0$



14 Démontrer que $\begin{vmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & 1 \\ \sin^2 y & \cos^2 y & 1 \\ \sin^2 z & \cos^2 z & 1 \end{vmatrix} = 0$

En utilisant les propriétés des déterminants, résoudre les équations suivantes:

15 $\begin{vmatrix} x & 1 & x \\ 2 & 3 & 4 \\ x & 5 & x \end{vmatrix} = 16$

16 $\begin{vmatrix} 1 & -x & 0 \\ x & 1 & x \\ 1 & -1 & x+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & 1 \\ -x & x \end{vmatrix}$

17 $\begin{vmatrix} 2 & -x & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ x+1 & 1 & x \end{vmatrix} = 2x + 1$

18 $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 1 & x & 2 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix} = x - 1$

En utilisant les propriétés des déterminants, démontrer que:

19 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b - a)(c - c)(c - b)$

20 $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$

21 $\begin{vmatrix} bc & c^2 & b^2 \\ c^2 & ca & a^2 \\ b^2 & a^2 & ab \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} a & c & b \\ c & b & a \\ b & a & c \end{vmatrix}$

22 $\begin{vmatrix} y+z & x & x \\ y & z+x & y \\ z & z & x+y \end{vmatrix} = 4xyz$

23 **Sans développer le déterminant, démontrer que** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & x \\ x & x & -y \end{vmatrix} = x^2 - y^2$

Sans développer le déterminant, trouver la valeur de:

24 $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 10 \\ 4 & 2 & 8 \\ -5 & 2 & -10 \end{vmatrix}$

25 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ -4 & 6 & 2 \end{vmatrix}$

En utilisant les propriétés des déterminants, démontrer que:

26 $\begin{vmatrix} (x+y)^2 & x^2+y^2 & 3xy \\ (z+\ell)^2 & z^2+\ell^2 & 3z\ell \\ (m+n)^2 & m^2+n^2 & 3mn \end{vmatrix} = 0$

27 $\begin{vmatrix} 0 & \ell & -m \\ -\ell & 0 & -n \\ m & n & 0 \end{vmatrix} = 0$

28 $\begin{vmatrix} 1 & mn & xy+z\ell \\ 1 & xy & mn+z\ell \\ 1 & z\ell & xy+mn \end{vmatrix} = 0$

Sans développer le déterminant, démontrer que:

29 $\begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix} = (x+2a)(x-a)^2$

30 $\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ x & 1+x^2 & xy \\ y & xy & 1+y^2 \end{vmatrix} = 1$

31 $\begin{vmatrix} x & -y & -z \\ y & 1 & 0 \\ z^2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x+y^2+z^3$

32 En utilisant les propriétés des déterminants

démontrer que $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -5 & -1 & -7 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} + \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 8 & 6 & 10 \\ 6 & 9 & 4 \end{vmatrix} = 0$

33 En utilisant les propriétés des déterminants, démontrer que :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & a & c \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(a+b+c)$$

34 En utilisant les propriétés des déterminants:

Démontrer que $\begin{vmatrix} bc & ab & 1 \\ ac & b^2 & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a+b)\begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ a & b^2 & b \\ b & c^2 & c \end{vmatrix}$

35 Sans développer le déterminant, démontrer que:

$$\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ac & bc & c^2+1 \end{vmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 + 1$$

36 Sans développer le déterminant, démontrer que :

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = a\,bc\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 1\right)$$

37 Si $\begin{vmatrix} a^3-1 & a^2 & a \\ b^3-1 & b^2 & b \\ c^3-1 & c^2 & c \end{vmatrix} = 0$ où $a \neq b \neq c$

démontrer que $abc = 1$

38 Sans développer le déterminant, démontrer que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ac & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

39 Sans développer le déterminant, démontrer que $\begin{vmatrix} bc & a^2 & a^2 \\ b^2 & ac & b^2 \\ c^2 & c^2 & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & ab & ac \\ ab & ac & bc \\ ab & bc & ab \end{vmatrix}$

Matrices

Unité (3)

3 - 2

Introduction

Vous avez déjà étudié qu'une matrice est un groupe d'éléments d'un tableau organisés en m lignes et n colonnes et encadrés par deux parenthèses sous la forme (   ). Une matrice est nommée par l'une des lettres de l'alphabet et sa dimension est notée sous la forme m × n

La matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ est de dimension 2×2

De même, la matrice $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ est de dimension 3×3

Tandis que la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ est de dimension 2×3

On utilise les matrices d'une manière pratique dans les transformations linéaires et dans la résolution d'un système des équations linéaires. Elles sont utilisées également dans plusieurs domaines des sciences comme la mécanique, les différentes branches de la physique, les représentations graphiques faites par les ordinateurs et dans le domaine de la statistique et la théorie des probabilités.

Inverse d'une matrice

Vous avez déjà étudié comment calculer l'inverse (s'il existe) d'une matrice carrée de dimension 2×2 **Vous savez que :**

Si A et B sont deux matrices carrées de dimension 2×2 **et Si** AB = BA = I, **alors** chacune des matrices A et B est l'inverse de l'autre.

Il faut noter que certaines matrices n'admettent pas d'inverses.

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors l'inverse de la matrice A est déterminé lorsque le déterminant de A $= \triangle \neq 0$, Dans ce cas:

$$A^{-1} = \frac{1}{\triangle} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Rappel

La matrice unitaire I est une matrice carrée dont les éléments de la diagonale principale sont 1 et les autres éléments sont nuls.

$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

A apprendre

- La matrice des co-facteurs
- Inverse d'une matrice carrée de dimension 3×3
- Résolution d'une équation linéaire en utilisant l'inverse d'une matrice.
- équations linéaires homogènes et non homogènes
- Rang de la matrice des équations
- Rang de la matrice élargie des coefficients
- Relation entre la matrice des coefficients et la matrice élargie des coefficients

Expressions de base

- Inverse d'une matrice
- Cofacteurs
- Matrice adjointe

Matériel utilisé

- Calculatrice scientifique

Exemple

1 Calculer l'inverse (s'il existe) de chacune des matrices suivantes :

a $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ b $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Solution

a On calcule le déterminant de la matrice $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$

$\therefore$ La matrice n'admet pas d'inverse

b On calcule le déterminant de la matrice $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2$

$\therefore$ La matrice admet un inverse noté B^{-1} Si $B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Essayez de résoudre

1 Trouver la valeur de A pour que la matrice $\begin{pmatrix} a & 9 \\ 4 & a \end{pmatrix}$ admette un inverse

Inverse d'une matrice 3 × 3

Si $\Delta_A \neq 0$, (le déterminant de A est différent de zéro), la matrice admet un inverse noté A^{-1} , A^{-1} est une matrice carrée telle que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ où I est la matrice unitaire

Exemple

2 La matrice A telle que = $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ admet-elle un inverse? Justifier la réponse

Solution

On détermine la valeur du déterminant da la matrice carrée A comme suit:

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-2 - 0) + (1 - 1) + 2(0 - 2) = -6 - 1 - 4 = -10$$

$\because$ $|A| \neq 0$, la matrice admet un inverse

Essayez de résoudre

2 La matrice $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ admet-elle un inverse ?

Rappel

Si $\Delta \neq 0$, la matrice A admet un inverse qu'on peut déterminer comme suit :

a) Permuter les deux éléments situés sur la diagonale principale de a matrice A.

b) Changer les signes des deux éléments situés sur l'autre diagonale.

c) Multiplier la matrice obtenue par $\frac{1}{\Delta}$ pour obtenir A^{-1}

Pour information

- **La matrice singulière est une matrice non inversible ($\Delta = 0$)**
- **La matrice non singulière est une matrice inversible ($\Delta \neq 0$)**

Cofacteurs

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ une matrice de dimension 3×3 ayant pour déterminant $\triangle_A$, alors:

Le cofacteur de l'élément $A_{y\,z}$ est la valeur du déterminant associé à cet élément, obtenu par la suppression de la ligne et de la colonne où se trouve l'élément, multipliée par $(-1)^{x+y}$ Par conséquent, la matrice des cofacteurs est:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Exemple

3 Trouver la matrice des cofacteurs de la matrice $= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Solution

On calcule les cofacteurs des éléments de la matrice A comme suit :

$M_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2$, $M_{21} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2$, $M_{31} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$

$M_{12} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2$, $M_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$, $M_{32} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$M_{13} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5$, $M_{23} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4$, $M_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$

Nous pouvons résumer la règle des signes reliant les déterminants associés et les cofacteurs des éléments d'une matrice carrée comme suit : :

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Par conséquent, la matrice des cofacteurs est : $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

Essayez de résoudre

3 Trouver la matrice des cofacteurs de la matrice A telle que $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

Matrice adjointe

La matrice adjointe d'une matrice A est la matrice des cofacteurs transposée. Elle est notée ${}^t\tilde{A}$

$${}^t\tilde{A} = {}^t\begin{pmatrix} \bar{c}_{11} & \bar{c}_{12} & \bar{c}_{13} \\ \bar{c}_{21} & \bar{c}_{22} & \bar{c}_{23} \\ \bar{c}_{31} & \bar{c}_{32} & \bar{c}_{33} \end{pmatrix}$$

Dans l'exemple précédent $^t\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 \\ -2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Exemple

4 Trouver la matrice adjointe de la matrice B telle que $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

Solution

On calcule la matrice des cofacteurs de la matrice B

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 1 & -5 \\ 15 & 2 & -10 \\ -6 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad ^t\tilde{B} = \begin{pmatrix} 7 & 15 & -6 \\ 1 & 2 & -1 \\ -5 & -10 & 4 \end{pmatrix}$$

Réflexion critique Dans l'exemple précédent, trouver la valeur de : $B \times {}^t\tilde{B}$, $^t\tilde{B} \times B$. Que remarquez-vous ?

Calcul de l'inverse d'une matrice carrée de dimension 3 × 3

Pour calculer l'inverse d'une matrice A de dimension 3×3 en utilisant la matrice des cofacteurs, on suit les étapes suivantes:

- On trouve la valeur du déterminant de A où $\Delta_A \neq 0$
- On calcule la matrice des cofacteurs des éléments de la matrice A.
- On calcule A la matrice adjointe de A (la matrice des cofacteurs transposée).
- On calcule l'inverse de la matrice par la relation

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta_A} \times {}^t\tilde{A}$$

Exemple

5 Trouver l'inverse de la matrice A telle que $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

Solution

On trouve la valeur du déterminant de A en utilisant les éléments de la première ligne (par exemple).

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 2\,(0 - 20) + 1\,(0 - 5) + 3\,(16 - 3) = -40 - 5 + 39 = -6$$

On calcule la matrice des cofacteurs des éléments de la matrice A =

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -20 & 5 & 13 \\ 12 & -3 & -9 \\ -14 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$

On calcule la transposée de la matrice des cofacteurs de A

$${}^t\tilde{A} = \begin{pmatrix} -20 & 12 & -14 \\ 5 & -3 & 2 \\ 13 & -9 & 10 \end{pmatrix}$$

alors $A^{-1} = \frac{1}{\Delta_A} \times {}^t\tilde{A} = \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} -20 & 12 & -14 \\ 5 & -3 & 2 \\ 13 & -9 & 10 \end{pmatrix}$

Essayez de résoudre

4 Calculer si c'est possible l'inverse de chacune des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Rappel

La matrice singulière : Son déterminant = 0
La matrice non singulière Son déterminant ≠ 0

Quelques propriétés de l'inverse d'une matrice

Soient A et B deux matrices non singulières. On a :

1 $(A\,B)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$

2 $(A^{-1})^{-1} = A$ **(l'inverse de l'inverse d'une matrice A = la matrice A)**

3 ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$ **(transposée de l'inverse = inverse de la transposée)**

4 $(A^{-1})^2 = (A^2)^{-1}$ **(le carré de l'inverse = l'inverse du carré)**

5 $(I)^{-1} = I$ **(l'inverse de la matrice unitaire = la matrice unitaire)**

Exemple

6 Si $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, vérifier les propriétés suivantes:

a) $(A\,B)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$ **b)** $(A^{-1})^{-1} = A$

Solution

$\Delta_A = 3 \times 2 - (-1) = 7$, $\Delta_B = 2 \times 5 - 1\,(-1) = 11$

$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

a)

$AB = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}$

$\therefore \Delta_{AB} = 77$

$\therefore (AB)^{-1} = \frac{1}{77} \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ **(1)**

$B^{-1} A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{77} \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ **(2)**

De (1) et (2) $\therefore (A B)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

b)

$A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{-1}{2} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$

$\therefore \Delta_{A^{-1}} = \frac{2}{7} \times \frac{3}{7} + \frac{1}{7} \times \frac{1}{7}$

$= \frac{6}{49} + \frac{1}{49} = \frac{1}{7}$

$\therefore (A^{-1})^{-1} = 7 \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = A$

$\therefore (A^{-1})^{-1} = A$

Essayez de résoudre

5. Dans l'exemple précédent, vérifier les propriétés suivantes

a) $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$ **b)** $(A^{-1})^2 = (A^2)^{-1}$

Exercices (3 - 2)

Choisir la bonne réponse parmi les réponses proposées

1. Parmi les matrices suivantes, la matrice singulière est :

a $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ **b** $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$ **c** $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ **d** $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

2. Pour que la matrice $\begin{pmatrix} x & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ soit singulière, x doit être égale à

a -2 **b** $-\frac{1}{2}$ **c** $\frac{1}{2}$ **d** 2

3. Toutes les matrices suivantes admettent un inverse sauf la matrice:

a $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ **b** $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ **c** $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$ **d** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

4. Si A est une matrice non singulière, alors $(AB)^{-1}$ égale à:

a $- A B$ **b** $A^{-1} B^{-1}$ **c** $B^{-1} A^{-1}$ **d** $(B A)^{-1}$

Répondre aux questions suivantes

5 Trouver la valeur de x qui rend chacune des matrices suivantes, singulière

a $\begin{pmatrix} x-3 & 2 \\ 7 & x+2 \end{pmatrix}$ **b** $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2x & 3x & x+1 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ **c** $\begin{pmatrix} x+4 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & x-1 & 1 \end{pmatrix}$

6 Trouver l'inverse de chacune des matrices suivantes

a $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ **b** $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ **c** $\begin{pmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}$ **d** $\begin{pmatrix} \sec\theta & \tan^2\theta \\ 1 & \sec\theta \end{pmatrix}$

e $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ **f** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **g** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **h** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

7 Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,vérifier que $(A\,B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

8 Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, vérifier que $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$

9 Si $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, vérifier que $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$

10 **Réflexion critique:** Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$, Démontrer que $A^2 - 7A - 8\,I = \square$

Utiliser ensuite ce résultat pour trouver l'inverse de la matrice A

Unité (3)

3 - 3

Résolution d'un système d'équations linéaires en utilisant l'inverse d'une matrice

A apprendre

- *Systèmes d'équations linéaires.*
- *Utilisation d'une calculatrice scientifique.*
- *Transformation de l'équation matricielle en équation linéaire.*
- *Calcul du rang d'une matrice.*
- *Possibilité de la résolution des équations en utilisant la matrice élargie.*

Expressions de base

- *Équation matricielle*
- *Rang d'une matrice*
- *Équation homogène*
- *Équation non homogène*
- *Matrice élargie*
- *Équations linéaires*
- *Matrice des cofacteurs*

Matériel utilisé

- *Calculatrice scientifique*

Réfléchir et discuter

Nous avons déjà utilisé différentes méthodes pour résoudre le système d'équations linéaires suivantes :

$$2x + 3y = 7 \quad , \quad 3x - y = 5$$

Pouvez-vous représenter les équations précédentes sous forme d'une matrice puis trouver l'ensemble solution de ces équations ?

Une équation matricielle représente un système complet d'équations.

Système d'équations	Équation matricielle
$2x + 3y = 7$ $3x - y = 5$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$

- Comparer le système d'équations dans sa forme algébrique au système de l'équation matricielle puis déterminer ou se trouve la matrice des coefficients, la matrice des variables et la matrice des constants.

Matrice des coefficients A		Matrice des variables X		Matrice des constants B
$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$	$\times$	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$=$	$\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$

Pour cela, nous pouvons écrire l'équation matricielle sous la forme AX = B

- Pouvez-vous trouver le produit des deux matrices $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$?
- Comparer le nombre de colonnes de la première matrice au nombre de lignes de la deuxième matrice. Que remarquez-vous ?
- Le produit obtenu doit être égal à $\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$
- Pouvez-vous utiliser l'inverse de la matrice étudié dans la leçon précédente pour résoudre l'équation matricielle ?

Systèmes d'équations linéaires

Nous pouvons résoudre un système de n équations linéaires contenant n variables et ayant une solution unique en utilisant le produit des matrices pour n = 2 et n = 3

Soit le système des équations suivant :

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3$$

On obtient AX = B

$$\text{où } A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

$A^{-1}(A \times X) = A^{-1} \times B$ — **En multipliant les deux membres par A^{-1}**

$(A^{-1} \times A) \times X = A^{-1} \times B$ — **Associativité**

$I \times X = A^{-1} A$ — **car I est l'élément neutre**

$X = A^{-1} B$

Remarquez que: la solution de l'équation matricielle AX = B est égale au produit de l'inverse de la matrice des coefficients par la matrice des constants.

Exemple

1 En utilisant l'inverse de la matrice, résoudre le système des équations suivantes:

$4x + y = 0,\ x + 2z = 15,\ y - 7z = 0$

Solution

On écrit l'équation matricielle AX = B Si

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -7 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On calcule ensuite l'inverse de la matrice des coefficients en utilisant la matrice des cofacteurs

$$\text{Déterminant de } A = \Delta_A = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -7 \end{vmatrix} = 4(-2) - 1(-7) = -1$$

$$\text{La matrice des cofacteurs } \tilde{A} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 1 \\ 7 & -28 & -4 \\ 2 & -8 & -1 \end{pmatrix} \qquad {}^t\tilde{A} = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 2 \\ 7 & -28 & -8 \\ 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\triangle_A} \times {}^t\tilde{A} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -2 & 7 & 2 \\ 7 & -28 & -8 \\ 1 & -4 & -1 \end{pmatrix} \qquad \therefore X = A^{-1}B$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -2 & 7 & 2 \\ 7 & -28 & -8 \\ 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 105 \\ 480 \\ 60 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ $x = -105$, $y = 480$, $z = 60$ l'ensemble solution $= \{(-105 , 480 , 60)\}$

Essayez de résoudre

1. En utilisant l'inverse de la matrice, résoudre le système des équations suivantes:
$2x - 3y - z = 9$, $x + 2y + 3z = 15$, $x - 2z = 12$ en utilisant l'inverse de la matrice

Utilisation d'une calculatrice scientifique

Nous pouvons utiliser une calculatrice scientifique pour résoudre un système d'équations linéaires à 3 inconnues comme suit:

- **Appuyer sur le bouton MODE, La liste suivante apparait:**

MODE 1 (COMP)	Calculs généraux
MODE 2 (CMPLX)	Calculs des nombres complexes
MODE 3 (STAT)	Calculs statistiques et régression
MODE 4 (BASE-N)	Calculs impliquant des systèmes numériques spécifiques (Binaire, octal, décimal, hexadécimal)
MODE 5 (EQN)	Résolution d'équations
MODE 6 (MATRIX)	Calculs matriciels
MODE 7 (TABLE)	Générer une table numérique basée sur une ou deux fonctions.
MODE 8 (VECTOR)	Calculs vectoriels
MODE ▼ 1 (INEQ)	Solution des inéquations
MODE ▼ 2 (VERIF)	Vérifier des calculs
MODE ▼ 3 (DIST)	Calculs de distributions

- Sélectionner 5 La liste suivante va apparaitre:

Bouton à appuyer	*Type de calculs*
1 $(a_nx + b_ny = c_n)$	Équations linéaires simultanées à deux inconnues
2 $(a_nx + b_ny = c_nz = d_n)$	Équations linéaires simultanées à trois inconnues
3 $(ax^2 + bx = 0)$	Équation du second degré
4 $(ax^3 + bx^2 + cx + d = 0)$	Équation du troisième degré

Sélectionner 2 Soient les équations suivantes à résoudre:

$x - y + z = 2 \quad , \quad x + y - z = 0 \quad , \quad -x + y + z = 4$

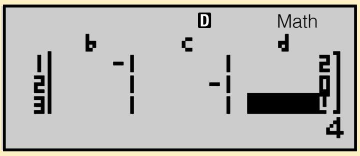
$x - y + z = 2,\ y - z = 0,\ -x + y + z = 4$

MODE 5 (EQN) 2 $(a_nX + b_nY + c_nZ = d_n)$

1 = (-) 1 = 1 = 2 =

1 = 1 = (-) 1 = 0 =

(-) 1 = 1 = 1 = 4 =



= (X=) = 1

▼ (Y=) = 2

▼ (Z=) = 3

Système des équations homogènes et non homogènes

On dit qu'un système d'inéquations est homogène si tous les éléments de la matrices des constants sont des zéros

Donc $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, Si l'un des éléments de la matrices des constants n'est pas nul, alors le système des inéquations est non homogène

Expression orale: Lequel des systèmes des inéquations suivantes est homogène et lequel est non homogène ?

1 $3x + 2y - 5z = 0 \quad , \quad 5x - 3y + 2z = 4 \quad , \quad x - 2z = 0$

2 $2x + 3y = 5z \quad , \quad 3x + z = 4y \quad , \quad x + z = 0$

Rang d'une matrice

Définition

Le rang d'une matrice non nulle est le plus grand degré d'un déterminant ou d'un déterminant inférieur de la matrice de valeur non nulle. Si une matrice A est non nulle, de dimension $m \times n$ où $m \geqslant n$,alors le rang de la matrice (A) noté rg(A) est telle que $1 \leqslant rg(A) \leqslant n$.

Exemple

2 Trouver le rang de chacune des deux matrices suivantes $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 12 & 15 \end{pmatrix}$

Solution

a) La matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice de dimension 2×3,Donc le plus grand degré du déterminant qu'on peur former est 2 On calcule

$\therefore \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 4 = -5 \neq 0$ $\qquad \therefore$ rg(A) = 2

b) La matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 12 & 15 \end{pmatrix}$ est une matrice de dimension 2×3, Donc le plus grand degré du déterminant qu'on peut former est 2

$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 12 & 15 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 15 \end{vmatrix} = 0$

$\because$ Tous le déterminants sont nuls $= 0$

$\therefore$ rg(A) < 2 $\qquad \therefore$ rg (A) $= 1$

Essayez de résoudre

2 Trouver le rang de chacune des deux matrices suivantes :

$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1,5 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

Exemple

3 Trouver le rang de chacune des deux matrices suivantes: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Solution

$\triangle_A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 25 \neq 0 \quad \therefore$ rg (A) = 3

$\triangle_B = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (L_3 = L_1 + L_2)$ $\qquad \therefore$ rg (B) < 3

On calcule un déterminant de rang 2

$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 10 = -7 \neq 0$ $\qquad \therefore$ rg (B) = 2

Essayez de résoudre

3 Trouver le rang de chacune des deux matrices suivantes $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 4 & -2 \\ 6 & 9 & 15 \end{pmatrix}$

Remarquez que

1- Si I est la matrice unitaire de dimension $m \times m$, alors le rang de I est égal à m car $|I| = 1 \neq 0$

2- Le rang d'une matrice nulle est égal à 0

3- Pour une matrice A on a $rg(A) = rg\ ({}^tA)$

4- Si on ajoute (ou on enlève) une ligne (ou une colonne) nulle d'une matrice A, son rang reste inchangé

5- Si on ajoute (ou on enlève) une ligne (ou une colonne) qui est une somme d'autres lignes (ou d'autres colonnes) d'une matrice A, son rang reste inchangé.

Réflexion créative

1- Si la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ k & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ et si rg (A) = 2, Trouver la valeur de K

2- Si la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & k & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ et si rg (A) = 3, trouver la valeur de k réelle

Matrice élargie

Si on dispose m équations linéaires à n inconnues, ont peut les écrire sous la forme $AX = B$
On définit la matrice élargie A^* telle que $A^* = (A|B)$ et c'est une matrice de dimension $m \times (n+1)$

Exemple

4 Trouver la matrice pour chacun des systèmes suivants :

a $3x - 5y = 2$, $2x + 7y = 9$, $4x - y = 3$

b $x + y + z = 9$, $2x - 3y + 2z = 3$, $3x + 2y - 3z = -3$

Solution

a $A^* = \left(\begin{array}{cc:c} 3 & -5 & 2 \\ 2 & 7 & 9 \\ 4 & -1 & 3 \end{array}\right)$

b $B^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 2 & -3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -3 & -3 \end{array}\right)$

Essayez de résoudre

4 Trouver la matrice pour chacun des systèmes suivants:

a $2x + 3y = 7$, $3x - y = 5$, $x - y = 1$

b $3x + 2y - z = 4$, $x + y + z = 3$, $x - z = 0$

Exemple

5 Trouver le rang de la matrice élargie du système $2x - y = 3$, $6x - 3y = 9$

Solution

$A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \vdots & 3 \\ 6 & -3 & \vdots & 9 \end{pmatrix}$ est une matrice de dimension 2×3

$\therefore$ donc le plus grand rang d'un déterminant qu'on peut obtenir est 2

$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0$, $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} = -9 + 9 = 0$ et $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 18 - 18 = 0$

$\because$ Tous les déterminants sont nuls = 0

$\therefore$ $rg(A^*) < 2$ $\qquad rg(A^*) = 1$

Essayez de résoudre

5 Trouver le rang de la matrice élargie de chacun des systèmes:

a $3x + 2y = 4$, $2x + 3y = -6$ b $3x - 5y = 2$, $9x + 15y = 10$

Possibilité de résoudre un système d'équations linéaires

a) Équations non homogènes

L'équation $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_n x_n = C$ est appelée équation non homogène. Le système $C \neq 0$ est appelée système non homogène où $C \neq \square$

1- Un système formé de n équations non homogènes a n inconnues admet une solution unique si $rg(A) = rg(A^*) = n$

2- Le système d'équations admet une infinité de solutions si $rg(A) = rg(A^*) = k$ Si $k < n$

3- Si $rg(A) \neq rg(A^*)$. le système d''équations n'admet pas de solutions

Équations linéaires à trois inconnues

Soient le système d'équations suivant

$a_1 x + b_1 y + c_1 z = k_1 \qquad a_2 x + b_2 y + c_2 z = k_2$

$a_3 x + b_3 y + c_3 z = k_3$ **On a** $AX = M$

où

$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$ et $A^* = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & k_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & k_3 \end{pmatrix}$

Le tableau suivant résume la possibilité de solutions du système d'équations précédent.
Si $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ (les équations sont homogènes) n'agit pas sur les rangs de la matrice élargie A^*.

Rg(A*)	Rg(A)	Possibilité de solutions
3	3	Il y a une solution unique
3	2	Il n'y a pas de solutions
3	1	Il n'y a pas de solutions
2	2	Il y a une infinité de solutions
2	1	Il n'y a pas de solutions
1	1	Il y a une infinité de solutions

b) Équations homogènes

L'équation: $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0$ est appelée équation homogène. Le système d'équations linéaires homogènes s'écrit sous la forme AX = ☐ Dans un système d'équations homogènes, le rang de la matrice des coefficients A est le même que le rang de la matrice élargie d'où on a :

1- Si le nombre d'inconnues rg (A) = rg(A^*)le système admet une solution unique $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$
appelée la solution nulle. (résultat évident)

2- Si le rang de la matrice des coefficients est inférieur au nombre d'inconnues, c'est à dire si rg(A) < n (où n est le nombre d'inconnues) et $\triangle_A = 0$, alors le système d'équations admet une infinité de solutions en plus de la solution nulle.

Exemple

(6) Montrer que le système d'équations 3x - 2y + 3z= 0 , x+y=0 , y - z = 0 admet uniquement une solution nulle.

Solution

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$ est une matrice carrée de dimension 3×3

$$\therefore \ \triangle_A = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$ En utilisant les éléments de la première colonne

$$\therefore \ \triangle_A = 3(-1 - 0) - 1(2 - 3) + 0(0 - 5)$$

$\triangle_A = -3 + 1 = -2 \neq 0$ $\therefore$ rg (A) = 3 = number of variables

$\therefore$ Le système admet une solution unique qui est la solution nulle. C'est la solution

x = 0, y = 0, z = 0 L'ensemble solution est = {(0 ; 0 ; 0)}

Essayez de résoudre

6 Montrer que le système d'équations $2x + y - z=0$, $x - z =0$ et $2y + z = 0$ admet uniquement une solution nulle

Exemple

7 Montrer que le système d'équations $3x + y + 4z = 0$, $2x + 3y + 5z = 0$, $-x + 2y + z=0$ admet une infinité de solutions puis trouver la forme de ces solutions

Solution

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$ est une matrice de dimension 3×3

$$\therefore \ \Delta_A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ Si } C_3 = C_1 + C_2 \qquad \therefore \ rg(A) = 2$$

$\because$ rg (A) =2 $<$ 3 le nombre d'inconnues

$\therefore$ Le système admet une infinité de solutions de la forme (L, L , -L).

Avec l'aide de votre professeur, chercher une méthode pour trouver la solution générale précédente

Essayez de résoudre

7 Montrer que le système d'équations: $2x+ 3y+ 5z = 0$, $7x + 4y -2z=0$, $6x + 9y + 15z = 0$ admet une infinité de solutions puis trouver la forme des ces solutions

Exercices (3 - 3)

Choisir la bonne réponse parmi les réponses proposées :

1 Parmi les systèmes d'équations linéaires suivants, le système d'équation homogènes est :

a $2x + y = 3 \, , \, x + 2y = 2$ **b** $x - y = 0 \, , \, x + 2y = 12$

c $3x + y = 1 \, , \, 2x + y = 0$ **d** $x - 2y = 0 \, , \, 3x + y = 0$

2 Si $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, alors $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est égal à =

a $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ **b** $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ **c** $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ **d** $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

3 Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 8 & 16 \end{pmatrix}$, alors rg(A) =

a 0 **b** 1 **c** 2 **d** 3

4 Le rang de la matrice unitaire I_3 est

a 3 **b** 2 **c** 1 **d** 0

5 Le rang de la matrice ▭ de dimension 3×3 est

a 0 **b** 1 **c** 2 **d** 3

6 Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ K & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et si rg (A) = 2, alors k =

a -2 **b** 0 **c** 2 **d** 6

7 Si m est le nombre d'équations linéaires et n est le nombre d'inconnues, alors la matrice élargie est de dimension

a $m \times n$ **b** $m \times (n + 1)$ **c** $(m + 1) \times n$ **d** $(m + 1)\,(n + 1)$

8 Le rang de la matrice élargie du système $- 3y = 5$, $6x - 9y = 15$ est

a 0 **b** 1 **c** 2 **d** 3

9 Le nombre de solutions du système : $2x + 5y = 0$, $3x - z = 0$, $2y - 3z = 0$ est

a la solution nulle uniquement. **b** 0.

c une infinité de solutions n'incluant pas la solution nulle

d une infinité de solutions incluant la solution nulle

10 Le système $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \square$ admet :

- **a** la solution évidente uniquement
- **b** une infinité de solutions incluant la solution nulle.
- **c** une infinité de solutions n'incluant pas la solution nulle
- **d** aucune solution

Répondre aux questions suivantes :

11 Résoudre chacune des équations matricielles suivantes:

a $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ **b** $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ **c** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

d $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ M \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ **e** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ **f** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

12 Pour chacun des systèmes suivants, écrire la matrice élargie puis résoudre le système en utilisant l'inverse de la matrice (si c'est possible) :

- **a** $2x + y + z = 0$, $3x + 2y + 3z = 12$, $4x + y + 2z = -1$
- **b** $x + 3y + 2z = 0$, $x + z = -1$, $x + 2y = 3$
- **c** $2x + y + 3z = 0$, $x + y = -1$, $y + 2z = 3$
- **d** $4x + 3y - 5z = 6$, $3x + 2y + 4z = 12$, $x - y + z = 2$

13 Montrer que chacun des systèmes suivants admet uniquement la solution nulle :

- **a** $2x + 7y + 3z = 0$, $3x + y - 2z = 0$, $4x - 3y - z = 0$
- **b** $x - 2y + 2z = 0$, $3x + 4z = 0$, $6z - y = 0$
- **c** $x + 2y - z = 0$, $2x + 3y - z = 0$, $3x - 4y + 2z = 0$

14 Montrer que chacun des systèmes suivants admet une infinité de solutions puis écrire la forme de la solution.

- **a** $x + 2y + 3z = 0$, $2x + 3y + 5z = 0$, $3x - y + 2z = 0$
- **b** $2x - y + 3z = 0$, $4x - 2y + 6z = 0$, $x + 2z = 0$
- **c** $3x - 5y - 2z = 0$, $2x + y + 3z = 0$, $-x + 3y + 2z = 0$

Résumé de l'unité

Déterminant: Un déterminant de rang n est constitué de n lignes et n colonnes. Il est formé en supprimant (n – 1) variables de n équations linéaires.

Propriétés des déterminants

- La valeur d'un déterminant ne change pas quand on remplace les lignes par les colonnes correspondantes.
- La valeur d'un déterminant ne change pas si on le développe selon n'importe quelle ligne ou colonne.
- Si on multiplie tous les éléments d'une ligne d'un déterminant (respectivement d'une colonne) par un même nombre réel, alors le déterminant obtenu est égal au déterminant initial multiplié par ce nombre.
- La valeur d'un déterminant s'annule dans chacun des cas suivants :

✔ Si tous les éléments d'une ligne (respectivement une colonne) d'un déterminant sont nuls, la valeur du déterminant s'annule

✔ Si les éléments correspondants de deux lignes (respectivement deux colonnes) d'un déterminant sont égaux, la valeur du déterminant s'annule.

- Si on intervertit les éléments de deux lignes d'un déterminant (respectivement deux colonnes) le déterminant se change en son opposé.
- Si dans un déterminant, une ligne (respectivement une colonne) peut être exprimée comme somme de deux lignes (respectivement deux colonnes), alors le déterminant est égal à la somme de deux déterminants.
- Si on ajoute aux éléments d'une ligne d'un déterminant (respectivement une colonne) le produit des éléments correspondants d'une autre ligne (respectivement une autre colonne) par un nombre réel, la valeur du déterminant reste inchangée.
- La valeur d'un déterminant triangulaire est égale au produit des éléments de sa diagonale principale.

Pour trouver l'inverse d'une matrice carrée de dimension 3×3 en utilisant la matrice des cofacteurs, on suit les étapes suivantes:

- On trouve la valeur du déterminant de A où $\triangle_A \neq 0$
- On calcule la matrice des cofacteurs des éléments de la matrice A .
- On calcule ${}^t\tilde{A}$ la matrice adjointe de A (la matrice des cofacteurs transposée).
- On calcule l'inverse de la matrice par la relation : $A^{-1} = \dfrac{1}{\triangle_A} \times {}^t\tilde{A}$

Résumé de l'unité

Résolution d'un système d'équations linéaires

En considérant que :

A est la matrice des coefficients

B est la matrice des constants

- L'équation matricielle s'écrit sous la forme AX: B
- La solution de cette équation est : $X = A^{-1} \times B$

Rang d'une matrice

Le rang d'une matrice non nulle est le plus grand degré d'un déterminant ou d'un déterminant inférieur de la matrice de valeur est non nulle. Si une matrice A est non nulle, de dimension $m \times n$ où $m \geqslant n$, alors le rang de la matrice A noté rg (A) où $1 \leqslant rg(A) \leqslant n$

Matrice élargie

Si on dispose de m équations linéaires à n inconnues, on peut les écrire sous la forme $AX = B$. On définit la matrice élargie A^* telle que :

$A^* = (A \mid B)$ et c'est une matrice de dimension $m \times (n + 1)$.

Equations non homogènes

Le système d'équations mis sous la forme d'une équation matricielle $AX = B$ est appelé système non homogène où $B \neq \square$

Un système formé de n équations non homogènes a n inconnues admet une solution unique si $rg(A) = rg(A^*) = n$, $\triangle_A \neq 0$

- Le système d'équations admet une infinité de solutions si $rg(A) = rg(A^*) = k$ si $k < n$
- Si $rg(A) \neq rg(A^*)$ le système d'’equations n'admet pas de solutions

Equations homogènes

Le système d'équations mis sous la forme d'une équation matricielle $AX =$ est appelé système homogène. Si :

- si $rg(A) = rg(A^*) = n$ (nombre d'inconnues), le système admet une solution unique appelée la solution nulle. (Elle est appelée également la solution évidente)
- $rg(A) < n$ (où n est le nombre d'inconnues), $\triangle_A = 0$, alors le système d'équations admet une infinité de solutions en plus de la solution nulle (la solution évidente)

Exercices généraux

[I] Choisir la bonne réponse parmi les réponses proposées :

1 $\begin{vmatrix} 24 & 25 & 26 \\ 27 & 28 & 29 \\ 30 & 31 & 32 \end{vmatrix} =$ ....

a 0 **b** 12 **c** 24 **d** 56

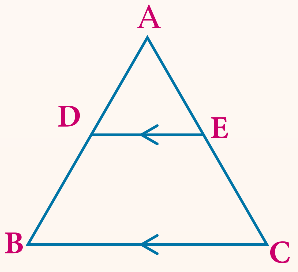
2 L'ensemble solution de $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 4 & x & 0 \\ x & 7 & 5 \end{vmatrix} = 0$ est ....

a {2} **b** {5} **c** {7} **d** {10}

3 $\begin{vmatrix} a+b & c+b & a+c \\ c & a & b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ ....

a -1 **b** 0 **c** a + b + c **d** a b c

4 Dans la figure ci-contre: $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$



$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ DE & AD & AE \\ BC & AB & AC \end{vmatrix} =$ ....

a 7 **b** 6 **c** 5 **d** 0

5 La valeur de x pour que la matrice $\begin{pmatrix} x-1 & 2 \\ 4 & x+1 \end{pmatrix}$ soit singulière est :

a - 3 **b** 3 **c** ± 3 **d** 9

6 Toutes les matrices suivantes n'admettent pas d'inverse sauf la matrice :

a $\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ **b** $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ **c** $\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ **d** $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}$

7 Si la matrice = $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 4 & 6 \\ 3 & -6 & -9 \end{pmatrix}$ alors rg(A) =

a 0 b 1 c 2 d 3

[II] Répondre aux questions suivantes:

Sans développer les déterminants, démontrer que:

8 $\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ b & 1+b^2 & bc \\ c & bc & 1+c^2 \end{vmatrix} = 1$

9 $\begin{vmatrix} 1 & bc & ca+ab \\ 1 & ca & ab+bc \\ 1 & ab & bc+ca \end{vmatrix} = 0$

10 $\begin{vmatrix} x+y+2 & x & y \\ 1 & 2x+y+1 & y \\ 1 & x & x+2y+1 \end{vmatrix} = 2(x+y+1)^3$

11 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ -2x+2x^2 & 1+2x^2 & 2x^3 \\ -3+2x^2 & 3x^2 & 1+3x^3 \end{vmatrix} = 1 + 5x + x^3$

12 $\begin{vmatrix} x+c & x+c & c^2 \\ c & x & c \\ 0 & c-x & x-c \end{vmatrix} = (x+2c)(x-c)^2$

13 $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$

14 Si (x – 1) est un facteur du déterminant $\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x+1 \\ -1 & 1 & x+k \end{vmatrix}$, trouver la valeur de k

15 Trouver la valeur de k pour que x soit un facteur du déterminant $\begin{vmatrix} x+1 & 3 & 1 \\ k & 2 & 3 \\ x & 2 & 1 \end{vmatrix}$
, Trouver la valeur de k

[III] Étudier la possibilité de résoudre chacun des systèmes suivants et trouver la solution si elle existe

16 $x + 2y + z = 3$, $4x - y - z = 6$ et $x + y + 3z = 10$

17 $x + y + z = 1$, $2x - y + 3z = -5$ et $3x + 2y + 3z = 0$

18 $x + 2y - 3z = 0$, $z - x - 2y = 0$ et $2x + 4y - 6z = 0$

19 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

20 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

21 $\begin{pmatrix} 2 & -4 & -6 \\ -1 & 2 & 3 \\ -3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Pour plus d'activités, visiter le site www.sec3mathematics.com.eg

Épreuve cumulative

Choisir la bonne réponse parmi les réponses proposées :

1. Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2$, alors $\begin{vmatrix} 5a & b & c \\ 5d & e & f \\ 35x & 7y & 7z \end{vmatrix} =$

   a) 700 b) 10 c) 35 d) 70

2. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et Si $A \times M = B$, alors $M =$

   a) $\begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -11 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -17 & 4 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -9 & 6 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

3. La matrice $\begin{pmatrix} 2 & a \\ a & 8 \end{pmatrix}$ est singulière si a =

   a) -4 b) 4 c) ±4 d) 16

4. Si $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et Si $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, alors y =

   a) 5 b) 6 c) 7 d) 8

5. $\begin{vmatrix} a+b & 5 & c \\ b+c & 5 & a \\ a+c & 5 & b \end{vmatrix} = ...$

   a) 5 b) 4 c) 3 d) 0

6. Si les équations $x + 2y + 3z = 5$, $2x - 3y + k z = 13$ $3x + k y + 2z = 3$ admettent une solution unique, alors $k \in$

   a) $\mathbb{R}$ b) $\mathbb{R} - \{-1\}$ c) $\mathbb{R} - \{13\}$ d) $\mathbb{R} - \{-1, 13\}$

7. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 6 & 9 & -3 \end{pmatrix}$, alors rg(A) =

   a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

8. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, alors rg($^tA$) =

   a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

Répondre aux questions suivantes:

9. Sans développer le déterminant, démontrer que : $\begin{vmatrix} 3x & 3x & 3x \\ 1 & b & a \\ a+b & a+1 & b+1 \end{vmatrix} = 0$

10. Calculer le rang de la matrice A $= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -5 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

11. Sans développer le déterminant, démontrer que: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1+y & 1 & 1 \\ 1 & 1+y & 1 \end{vmatrix} = y^2$

12. En utilisant l'inverse des matrices, résoudre le système des équations suivantes :

$2x + 2y - z = 3,\ 3x + y = 5,\ x + y + 2z = 9$

13. En utilisant les propriétés des déterminants, démontrer que:

$$\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix} = a\,bc + x\,(ab + bc + a\,c)$$

14. Étudier la possibilité de résoudre le système des équations suivantes :

$x - y + z = 2\ ,\ 2x + 3y - z = 5,\ 3x - 5y + 2z = -1$

15. Si $\begin{vmatrix} x & y & z+2 \\ x & y+2 & z \\ x+2 & y & z \end{vmatrix} = -4$ trouver la valeur de $x + y + z$

16. Parmi les matrices suivantes, montrer celles qui sont singulières et celles qui sont non singulières:

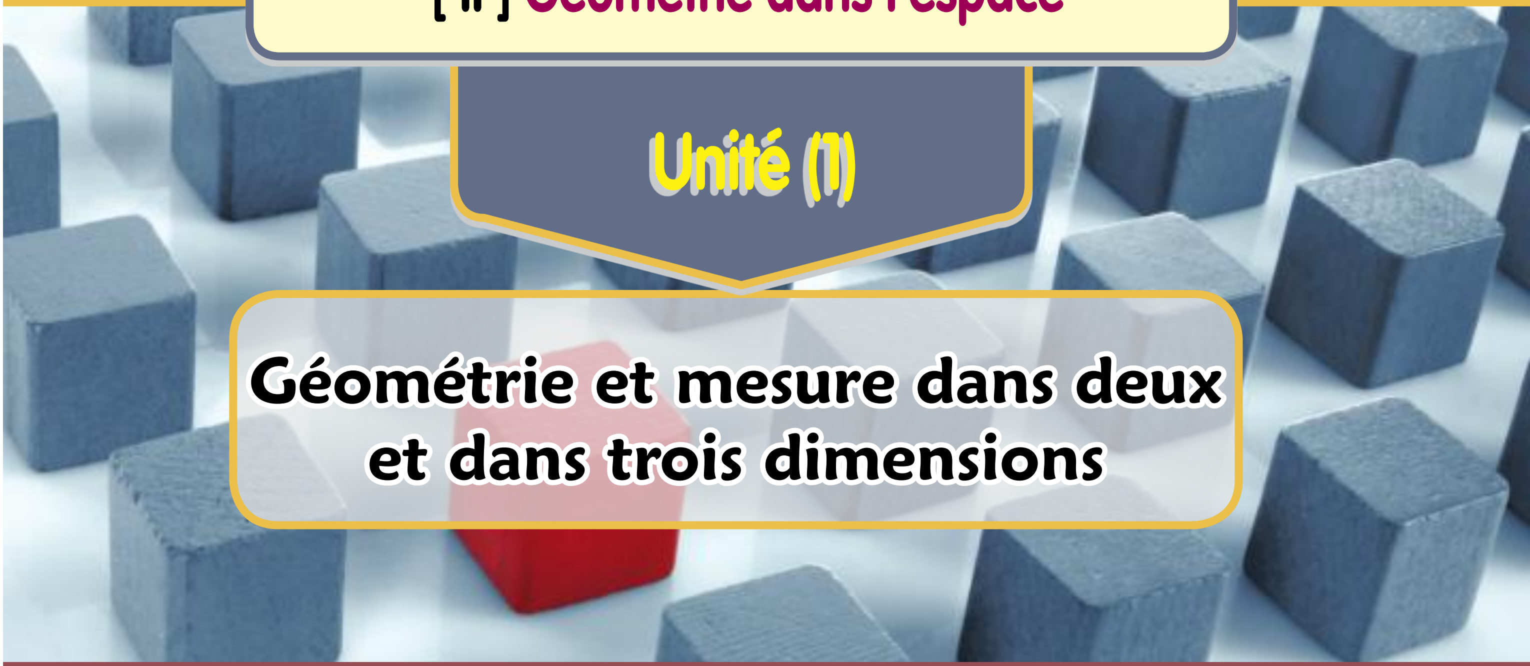
a $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

b $B = \begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

c $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

d $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

[II] Géométrie dans l'espace



Unité (1)

Géométrie et mesure dans deux et dans trois dimensions

Introduction de l'unité

La géométrie est la science de l'étude des différentes figures et leurs propriétés. Elle étudie également les relations entre les figures, les angles et les distances. Elle est subdivisée en deux branches :

La géométrie plane qui étudie les figures géométriques ayant deux dimensions, et la géométrie dans l'espace qui traite les solides ayant trois dimensions (longueur, largeur, hauteur). Elle traite des formes parallélépipédiques, cylindriques, coniques et sphériques. Les Grecs étaient les premiers à utiliser la géométrie, Thalès a démontré certains théorèmes et Euclide a rassemblé toutes les propriétés géométriques, et les a classifiés dans un livre intitulé «Les Éléments». Ensuite, la géométrie a évoluée en géométrie dans l'espace, trigonométrie, géométrie de Minkowski (traitant quatre dimensions), géométrie non euclidienne et d'autres. Dans cette unité, nous allons étudier l'utilisation des vecteurs dans l'étude des droites, des plans et la relations entre eux dans trois dimensions.

Objectifs de l'unité

Après l'étude de l'unité, et après avoir réalisé les activités, il est attendu que l'élève soit capable de :

- Identifier un repère à trois dimensions et décomposer un vecteur dans l'espace.
- Calculer la distance entre deux points dans l'espace et les coordonnées du milieu d'un segment dans l'espace.
- Trouver l'équation cartésienne d'une sphère en fonction des coordonnées de son centre et d'un point de sa surface.
- Identifier les vecteurs dans l'espace à travers :
  - La représentation du vecteur par un triplet.
  - Les vecteurs unitaires de base $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ et $\vec{k} = (0, 0, 1)$.
  - Exprimer un vecteur en fonction des vecteurs unitaires de base $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$
  - Exprimer un segment orienté dans l'espace en fonction des coordonnées de ses extrémités.
- Identifier le produit scalaire et produit vectoriel de deux vecteurs dans le pan et dans l'espace.
- Identifier les propriétés du produit scalaire et du produit vectoriel de deux vecteurs dans le plan et dans l'espace.
- Identifier l'angle entre deux vecteurs dans l'espace.
- Identifier la perpendicularité de deux vecteurs dans l'espace.
- Déterminer les angles directeurs et les cosinus d'un vecteur dans l'espace.
- Utiliser le produit scalaire pour trouver la composante algébrique et orientée d'un vecteur dans la direction d'un autre.
- Utiliser le produit scalaire pour trouver le travail fourni.
- Identifier la signification géométrique de la norme du produit vectoriel.
- Identifier le produit mixte et sa signification géométrique.

Expressions de base

- *Espace*
- *À trois dimensions*
- *projection*
- *Règle de la main droite*
- *Vecteur à trois dimensions*
- *Plan*
- *Scalaire*
- *Produit vectoriel*
- *Composante d'un vecteur*
- *Travail*
- *Produit mixte*
- *Vecteur de position*
- *Vecteur unitaire*
- *Norme d'un vecteur*

Matériel utilisé

- *Calculatrice scientifique*

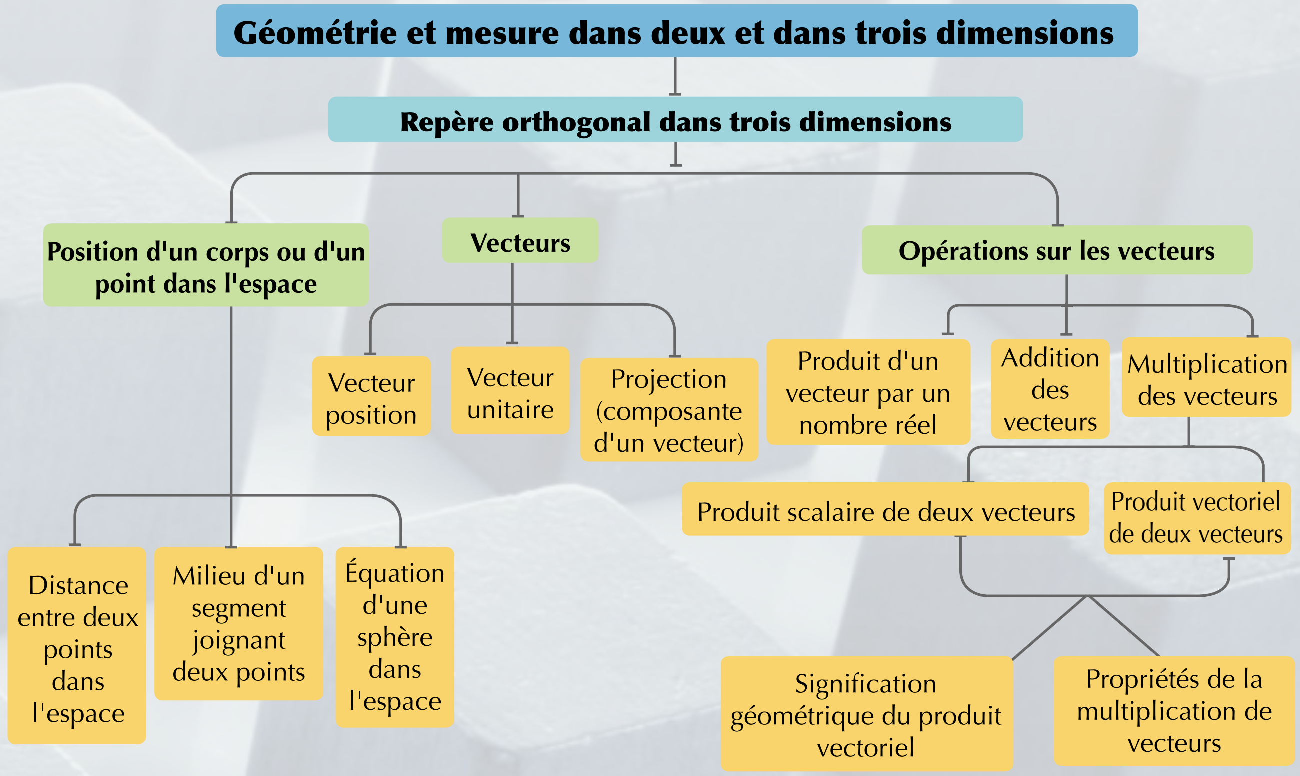
Leçons de l'unité

Leçon (1 - 1): Repère orthogonal dans trois dimensions.

Leçon (1 - 2): Vecteurs dans l'espace.

Leçon (1 - 3): Produit des vecteurs.

Organigramme de l'unité



Unité (1)

1 - 1 Repère orthogonal dans trois dimensions

A apprendre

- *Déterminer la position d'un point dans un repère à trois dimensions.*
- *Déterminer les coordonnées du milieu d'un segment joignant deux points dans l'espace.*
- *Trouver la distance entre deux points dans l'espace.*
- *Équation d'une sphère dans l'espace.*

Expressions de base

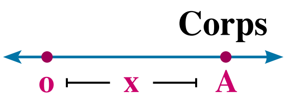
- *Espace*
- *À trois dimensions*
- *Projection*
- *Règle de la main droite*
- *Plan*

Matériel utilisé

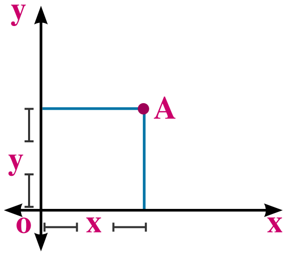
- *Calculatrice scientifique*

Réfléchir et discuter

- Pour déterminer la position d'un corps sur une droite, il est nécessaire de trouver la distance de ce corps par rapport à un point fixe (facultatif) appelé le point d'origine (O)
  OA = x ∈ ℝ



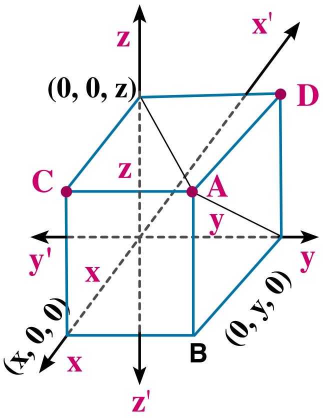
- Pour déterminer la position d'un corps dans un plan, il est nécessaire de trouver la projection de ce corps sur chacun des deux axes d'un repère orthogonal
- Comment pouvez-vous déterminer la position d'un corps dans l'espace ?



À apprendre

Repère orthogonal à trois dimensions ($\mathbb{R}^3$)

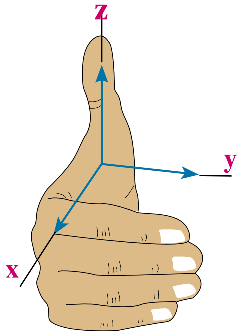
Les coordonnées d'un point A sont déterminées dans l'espace, par rapport à trois axes concourants en un même point et orthogonaux deux à deux, en déterminant la projection de ce point sur chaque axe .



Pour réfléchir : Dans le repère à trois dimensions précédent, trouver les coordonnées de chacun des points B , C et D

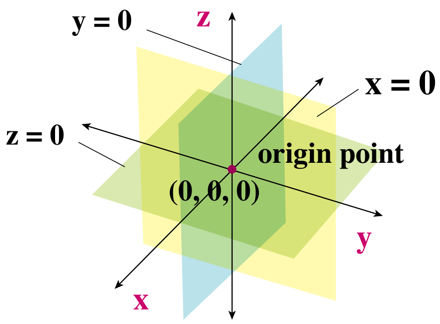
Notions de base :

1- Règle de la main droite



Pour construire un repère orthogonal à trois dimensions, il faut suivre la règle de la main droite où les doigts courbés dans la figure indiquent le passage de la direction positive de l'axe des x vers la direction positive de l'axe des y et le pouce indique la direction positive de l'axe des z.

2- Plans des repères



- Tous le points dans l'espace ayant pour coordonnées (x ; y ; 0) sont situés dans le plan cartésien XY dont l'équation est $z = 0$
- Tous le points dans l'espace ayant pour coordonnées (x ; 0 ; z) sont situés dans le plan cartésien XZ dont l'équation est $y = 0$
- Tous le points dans l'espace ayant pour coordonnées (0 ; y ; z) sont situés dans le plan cartésien YZ dont l'équation est $x = 0$

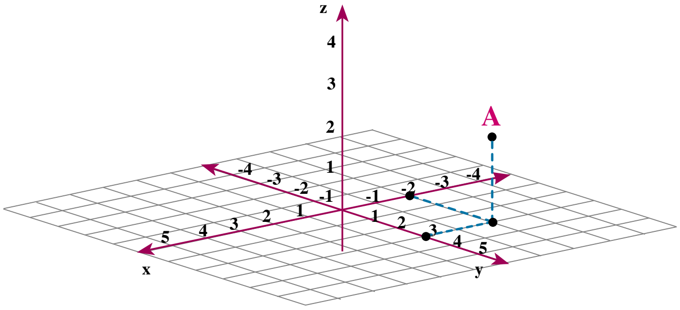
Exemple **(Détermination de la position d'un point dans l'espace)**

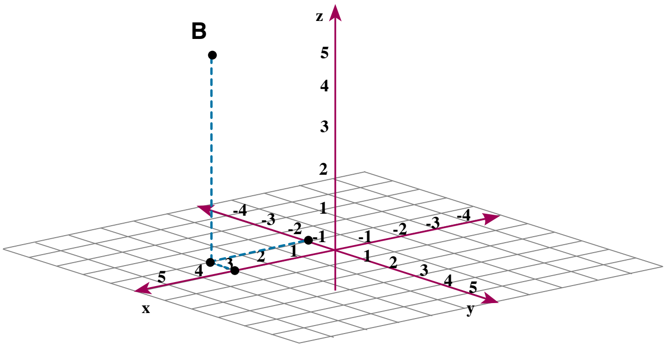
(1) Déterminer de la position de chacun des points suivants en utilisant un repère orthogonal à trois dimensions:

(a) A (-2, 3, 2) (b) B (3, -1, 5) (c) C (4, 0, -1)

Solution

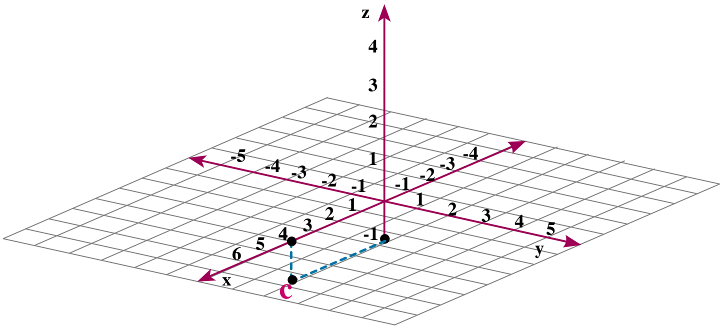
(a) Pour déterminer le point A(–2 ; 3 ; 2) , on détermine le point (–2 ; 3) dans le plan cartésien XY puis on se déplace de deux unités de longueur dans la direction positive de l'axe des z. Le point obtenu est A(–2 ; 3 ; 2).





(b) Pour déterminer le point B(3 ; –1 ; 5), on détermine le point (3 ; –1) dans le plan cartésien XY puis on se déplace de cinq unités de longueur dans la direction positive de l'axe des z. Le point obtenu est B(3 ; –1 ; 5).

c Pour déterminer le point C(4;0;–1), on détermine le point (4 ; 0) dans le plan cartésien XY puis on se déplace d'un unité de longueur dans la direction négative de l'axe des z. Le point obtenu est C(4 ; 0 ; –1).



Essayez de résoudre

1 **a** Déterminer la position de chacun des points suivants en utilisant un repère orthogonal à trois dimensions :

A (3, 2, 3) B (-1, 4, 3) C (0, 0, 4)

b **Compléter:**

1- La distance du point A(–1 ; 2 ; 3) par rapport au plan cartésien XY = ... unités de longueur.

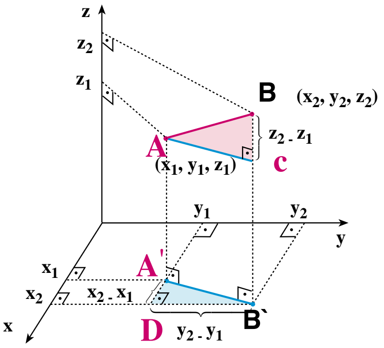
2- La distance du point A(4 ; –2 ; 1) par rapport au plan cartésien YZ = ... unités de longueur.

À apprendre

Distance entre deux points dans l'espace

Soients $A(x_1 ; y_1 ; z_1)$ et $B(x_2 ; y_2 ; z_2)$ deux points dans l'espace. La distance entre les deux points A et B est donnée par la relation

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



Exemple

2 Démontrer que le triangle ABC tel que A = (2, -1, 3) , B(-4, 4, 2) et C (-2, 5, 1) est un triangle rectangle en C.

Solution

$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ **Formule de la distance entre deux points**

$= \sqrt{(2 + 4)^2 + (-1 - 4)^2 + (3 - 2)^2} = \sqrt{62}$

$BC = \sqrt{(-4 + 2)^2 + (4 - 5)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{6}$

$AC = \sqrt{(2 + 2)^2 + (-1 - 5)^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{56}$

$\because (AB)^2 = (\sqrt{62})^2 = 62,\ (BC)^2 + (AC)^2 = (\sqrt{6})^2 + (\sqrt{65})^2 = 6 + 56 = 62$

$\therefore (AB)^2 = (BC)^2 + (AC)^2$ $\therefore m(\hat{C}) = 90^\circ$

Essayez de résoudre

2) Démontrer que les points A = (4, 4, 0), B = (4, 0, 4) et C = (0, 4, 4) sont les sommets d'un triangle rectangle isocèle puis calculer son aire.

À apprendre

Coordonnées du milieu d'un segment dans l'espace

Soient $A(x_1, y_1, z_1)$ et $B(x_2, y_2, z_2)$ deux points dans l'espace. Les coordonnées du point C, le milieu du segment $\overline{AB}$ sont :

$$C = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

Exemple

3) Soient A = (1, -3, 2), B = (4, -1, 4), Trouver les coordonnées du milieu de $\overline{AB}$

Solution

Coordonnées du milieu de $= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$

$= \left(\frac{1+4}{2}, \frac{-3-1}{2}, \frac{2+4}{2}\right)$

$= \left(\frac{5}{2}, -2, 3\right)$

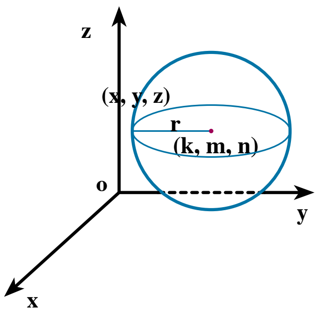
Essayez de résoudre

3) Trouver les coordonnées du milieu de $\overline{CD}$ tel que C = (0, 4, -2) et D(-6, 3, 4)

Réflexion critique : Si C(2 ; 2 ; 6) est le milieu de $\overline{AB}$ où A (1, -4 , 0), trouver les coordonnées du point B

À apprendre

Équation d'une sphère dans l'espace



On définit la sphère comme étant un ensemble de points dans l'espace situés à une distance fixe d'un point donné (appelé le centre de la sphère).

Si le point (x ; y ; z) est situé sur une sphère ayant pour centre le point (k ; m ; n) et pour rayon r , alors d'après la formule de la distance entre deux points, on a :

$\sqrt{(x-k)^2 + (y-m)^2 + (z-n)^2} = r$ En élevant les deux membres au carré, on obtient la forme standard de l'équation d'une sphère $(x-k)^2 + (y-m)^2 + (z-n)^2 = r^2$

Remarque : L'équation générale d'une sphère est :
$x^2 + y^2 + z^2 + 2kx + 2my + 2nz + d = 0$
C'est l'équation d'une sphère ayant pour centre (–k ; –m ; – n)
La longueur de son rayon = $\sqrt{k^2 + m^2 + n^2 - d}$ où $k^2 + m^2 + n^2 > d$

Exemple

4 Trouver la forme standard de l'équation d'une sphère ayant pour centre le point (2 ; –1 ; 4) et pour longueur de rayon 3 unités.

Solution

L'équation de la sphère est $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 4)^2 = 9$

Essayez de résoudre

4 Trouver l'équation d'une sphère ayant pour centre le point d'origine et pour longueur de rayon 5 unités.

Exemple

5 Trouver l'équation d'une sphère ayant pour extrémités d'un diamètre les deux points A(–1 ; 5 ; 4) et B(5 ; 1 ; –2).

Solution

Le centre du cercle est le milieu de $\overline{AB}$ qui est $= (\frac{-1+5}{2}, \frac{5+1}{2}, \frac{4-2}{2}) = (2, 3, 1)$

La longueur du rayon de la sphère est la distance entre son centre et le point A

$\therefore r = \sqrt{(2+1)^2 + (3-5)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{22}$

$\therefore$ L'équation de la sphère $= (x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2 = 22$

Essayez de résoudre

5 Trouver l'équation d'une sphère ayant pour diamètre $\overline{AB}$ où A (-1, 4 , 2) et B (3, -2, 6)

Exemple

6 Déterminer le centre et la longueur du rayon d'une sphère ayant pour équation
$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 6z + 11 = 0$

Solution

Les coordonnées du centre de la sphère =
$(-\frac{1}{2}$ coefficient de x ; $-\frac{1}{2}$ coefficient de y ; $-\frac{1}{2}$ coefficient de z) = (-2, 1, 3)

$\therefore r = \sqrt{k^2 + m^2 + n^2 - d} = \sqrt{(-2)^2 + (1)^2 + (3)^2 - 11} = \sqrt{3}$ unités de longueur

Essayez de résoudre

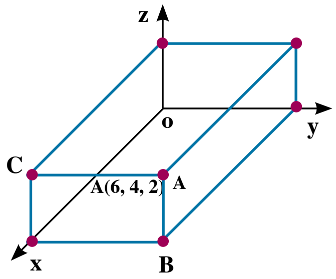
6 Déterminer le centre et la longueur du rayon d'une sphère ayant pour équation
$x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 8y + 4z + 1 = 0$

Exercices 1 - 1

Compléter ce qui suit :

1. Si le point (x ; y ; z) est situé dans le plan cartésien XY , alors z = ...

2. Les deux droites $\overleftrightarrow{xx'}$ et $\overleftrightarrow{zz'}$ forment le plan cartésien .... qui a pour équation ....



3. La figure ci-contre représente un parallélépipède construit dans un repère orthogonal. Si l'un de ses sommets est le point d'origine O(0 ; 0 ; 0), alors les coordonnées du point B sont .... et les coordonnées du point C sont ....

4. Si A(1 ; –1 ; 4) et B(0 ; –3 ; 2), alors les coordonnées du milieu de $\overline{AB}$ sont ....

5. L'équation de la sphère ayant pour centre (2 ; –1 ; 4) et pour longueur de rayon 5 unités de longueur est ....

Choisir la bonne réponse parmi les réponses proposées :

6. La distance du point (3 ; –1 ; 2) par rapport au plan cartésien XZ est égale à .... unités de longueur

   a) 3 b) -1 c) 2 d) 1

7. La longueur de la perpendiculaire abaissée du point (–2 ; 3 ; 4) sur l'axe des x est égale à .... unités de longueur.

   a) 2 b) 3 c) 5 d) 4

8. Les coordonnées du milieu du segment ayant pour extrémités les deux points (–3 ; 2 ; 4) et (5 ; 1 ; 8) est ....

   a) $(1, \frac{3}{2}, 6)$ b) (2, -1, 4) c) (8, -1, 4) d) $(1, -\frac{3}{2}, 2)$

9. L'équation de la sphère ayant pour centre le point d'origine et pour longueur de rayon 5 unités de longueur est ....

   a) $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ b) $x^2 + y^2 + z^2 = 0$
   c) $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 + (z - 5)^2 = 25$ d) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

10. L'équation de la sphère ayant pour centre le point (2 ; –3 ; 4) qui est tangente au plan cartésien XY est ....

   a) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 4)^2 = 4$ b) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 4)^2 = 9$
   c) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 4)^2 = 16$ d) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 4)^2 = 16$

Répondre aux questions suivantes :

11 Calculer la distance entre les deux points A et B dans chacun des cas suivants :

a A (7 , 0, 4) et B (1 , 0 , 0) **b** A (4, 1, 9) et B (2 , 1 , 6)

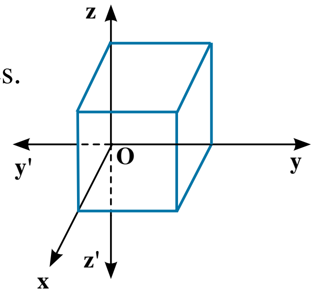
c A (1 , 1 , -7) et B (-2 , -3 , -7)

12 Dans chacun des cas suivants, démontrer que les trois points donnés sont les sommets d'un triangle rectangle puis calculer son aire :

a (-2 , 5 , 2), (0 , 0 , 2) et (0 , 4 , 0) **b** (-4 , 4 , 1), (2 , -1 , 2) et (-2 , 5 , 0)

13 La figure ci-contre représente un cube de volume 27 unité cubiques.

Si l'un de ses sommets est le point d'origine, trouver les coordonnées de ses autres sommets .



14 Démontrer que les points (7 ; 1 ; 3) , (5 ; 3 ; k) et (3 ; 5 ; 3) sont les sommets d'un triangle isocèle pour toutes les valeurs réelles de k. Trouver ensuite la valeur ou les valeurs de k pour que le triangle soit équilatéral

15 Trouver les coordonnées du milieu du segment $\overline{AB}$ dans chacun des cas suivants :

a A(3, -1, 4) et B (2, 0, -1) **b** A(-3, 5, 5) et B (-6, 4, 8)

16 Si le point C (-1, 4, 0) est le milieu du segment $\overline{AB}$ où B(4 , –2 ; 1), trouver les coordonnées du point A.

17 Trouver l'équation de la sphère sachant que :

a son centre est le point (3 ; –1 ; 2) et la longueur de son rayon est $\sqrt{7}$ unités

b les points (3 ; 4 ; –3) et (0 ; 2 ; 1) sont les extrémités de l'un de ses diamètres.

c son centre est le point (1 ; –6 ; 1) et la sphère passe par le point (2 ; –1 ; 5).

18 Trouver le centre et la longueur du rayon de la sphère dans chacun des cas suivants :

a $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

b $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y = 0$

c $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2x - 6y - 4z + 5 = 0$

19 Trouver l'équation d'une sphère ayant pour longueur de rayon 3 unités sachant qu'elle est tangente aux trois plans cartésiens positifs.

20 **Réflexion créative :**

Soient A , B et C trois points tels que A ∈ axe des x , B ∈ axe des y et C ∈ axe des z. Si le point (1 ; –1 ; 0) est le milieu de $\overline{AB}$ et le point (0 ; –1 ; 2) est le milieu de $\overline{BC}$, trouver les coordonnés du milieu de $\overline{AC}$.

21 **Réflexion créative :**

Si l'axe des x coupe la sphère d'équation $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 1)^2 = 14$ aux deux points A et B, trouver la longueur de $\overline{AB}$

22 **L'écriture en mathématiques :**

Si tous les points de l'espace de la forme (x ; y ; 0) sont situés dans le plan cartésien XY qui a pour équation z = 0 , trouver l'équation du plan qui contient tous les points de l'espace de la forme (x ; y ; 2).

23 **Déceler l'erreur :**

Si le point B(–1 ; 4 ; 2) est le milieu du segment $\overline{AC}$ où A(1 ; 0 ; 2) , trouver les coordonnées du point C

Solution d'Ashraf	Solution de Ziad
$C = \left(\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right), \left(\frac{y_1 + x_2}{2}\right), \left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right)\right)$ $= \left(\left(\frac{-1 + 1}{2}\right), \left(\frac{4 + 0}{2}\right), \left(\frac{2 + 2}{2}\right)\right)$ $= (0, 2, 2)$	Soit C (x, y, z) $\therefore \frac{1 + x}{2} = -1 \longleftarrow x = -3$ $\frac{0 + y}{2} = 4 \longleftarrow y = 8$ $\frac{2 + z}{2} = 2 \longleftarrow z = 2$ $\therefore$ C (-3, 8, 2)

Laquelle des deux solutions est correcte ? Justifier votre réponse.

Unité (1)

1 - 2 Vecteurs dans l'espace

A apprendre

- *Représentation d'un vecteur*
- *Vecteur de position dans l'espace*
- *Vecteurs unitaires dans l'espace*
- *Expression d'un vecteur en fonction des vecteurs unitaires.*
- *Expression d'un segment orienté dans l'espace en fonction des coordonnées de ses extrémités.*
- *Égalité de deux vecteurs dans l'espace.*
- *Norme d'un vecteur dans l'espace.*
- *Vecteur unitaire dans la direction d'un vecteur dans l'espace.*
- *Addition de vecteurs dans l'espace.*
- *Produit des vecteurs par un nombre réel.*

Expressions de base

- *Vecteur de position dans l'espace*
- *Norme d'un vecteur*
- *Vecteur unitaire*
- *Produit scalaire*
- *Produit vectoriel*

Introduction:

Vous avez déjà étudié les quantités scalaires et les quantités orientées. Vous savez qu'un vecteur est représenté par un segment orienté et que le segment orienté est déterminé par une quantité scalaire (norme du vecteur) et un sens. Dans cette leçon, nous allons aborder les vecteurs dans l'espace (dans un repère à trois dimensions).

À apprendre

Vecteur de position dans l'espace

Un vecteur de position d'un point $A(A_x ; A_y ; A_z)$ est défini par rapport au point d'origine $O(0 ; 0 ; 0)$ comme étant le segment orienté ayant pour origine le point d'oigne O et pour extrémité le point A.

- Le vecteur de position du point A est noté $\vec{A}$ d'où $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$
- A_x est appelée la composante du vecteur $\vec{A}$ dans la direction de l'axe des x.
- A_y est appelée la composante du vecteur $\vec{A}$ dans la direction de l'axe des y.
- A_z est appelée la composante du vecteur $\vec{A}$ dans la direction de l'axe des z.

Norme d'un vecteur

C'est la longueur du segment orienté représentant ce vecteur.

Si $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ et d'après la formule de la distance, on a :

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2 + (A_z)^2}$$

Exemple

(1) Si $\vec{A} = (2, -1, 3)$ et $\vec{B} = (0, 4, -3)$, alors :

- la composante du vecteur $\vec{A}$ dans la direction de l'axe des x est 2
- la composante du vecteur $\vec{B}$ dans la direction de l'axe des z est –3

$\|\vec{A}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (3)^2} = \sqrt{14}$

$\|\vec{B}\| = \sqrt{(0)^2 + (4)^2 + (-3)^2} = 5$

Le vecteur $\vec{B}$ est situé dans le plan cartésien YZ (la composante de $\vec{B}$ dans la direction de l'axe des x s'annule)

Essayez de résoudre

1) Si $\vec{A} = (-1, 4, 2)$ et $\vec{B} = (3, 1, 0)$, trouver

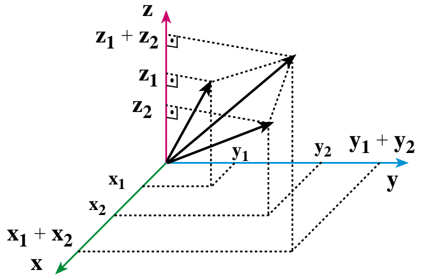
a) $A_x + B_y$

b) $\|\vec{A}\| + \|\vec{B}\|$

Addition des vecteurs dans l'espace

Si $\vec{A} = (A_x\ A_y, A_z)$ et $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$, alors:

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z) = (C_x, C_y, C_z)$$



Exemple

2) Si $\vec{A} = (-2, 3, 1)$ et $\vec{B} = (0, -2, 4)$, alors:

$$\vec{A} + \vec{B} = (-2, 3, 1) + (0, -2, 4) = (-2+0, 3+(-2), 1+4) = (-2, 1, 5)$$

Essayez de résoudre

2) Si $\vec{A} = (4, -4, 0)$ et $\vec{B} = (-1, 5, 2)$, trouver $\vec{A} + \vec{B}$

Propriétés de l'addition des vecteurs dans l'espace

Pour deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ appartenant à $\mathbb{R}^3$, on a :

1- Stabilité : $\vec{A} + \vec{B} \in \mathbb{R}^3$

2- Commutativité : $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$

3- Associativité : $(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$

4- L'élément neutre pour l'addition (Le vecteur nul) : $\vec{O} = (0, 0, 0)$ est l'élément neutre pour l'addition dans $\mathbb{R}^3$

d'où $\vec{A} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{A} = \vec{A}$

5- L'opposé : Pour tout vecteur $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) \in \mathbb{R}^3$ il existe

$-\vec{A} = (-A_x, -A_y, -A_z) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $\vec{A} + (-\vec{A}) = (-\vec{A}) + \vec{A} = \vec{O}$

Multiplication d'un vecteur par un nombre réel

Si $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) \in \mathbb{R}^3$ et $k \in \mathbb{R}$, alors:

$$k\vec{A} = k(A_x, A_y, A_z) = (kA_x, kA_y, kA_Z) \in \mathbb{R}^3$$

Par exemple :

$3\,(2, -1, 4) = (6, -3, 12)$

$\frac{1}{2}\,(4, 9, 6) = (2, \frac{9}{2}, 3)$

$-2\,(1, -3, -4) = (-2, 6, 8)$

Propriétés de la multiplication d'un vecteur par un nombre réel

Si $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ appartenant à $\mathbb{R}^3$ et si $k \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{R}$, on a:

1. Distributivité

- $k(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}) = k\,\overrightarrow{A} + k\,\overrightarrow{A}$
- $(k + m)\,\overrightarrow{A} = k\,\overrightarrow{A} + m\,\overrightarrow{A}$

2. Associativité

- $k(m\,\overrightarrow{A}) = m\,(k\,\overrightarrow{A}) = (k\,m)\,\overrightarrow{A}$

Exemple

③ Si $\overrightarrow{A} = (-1, 5, 2)$ et $\overrightarrow{B} = (4, -1, 3)$, alors:

1. $2\overrightarrow{A} - 3\overrightarrow{B} = 2(-1, 5, 2) -3\,(4, -1, 3)$

$= (-2, 10, 4) + (-12, 3, -9)$

$= (-14, 13, -5)$

2. Trouver le vecteur $\overrightarrow{C}$ tel que $\overrightarrow{C} + 3\,\overrightarrow{A} = 2\,\overrightarrow{B}$

$\because 2\,\overrightarrow{C} + 3\,\overrightarrow{A} = 2\,\overrightarrow{B}$ — **En additionnant $-3\,\overrightarrow{A}$ aux deux membres**

$\therefore 2\,\overrightarrow{C} = 2\,\overrightarrow{B} - 3\,\overrightarrow{A}$

$\therefore 2\,\overrightarrow{C} = 2\,(4, -1, 3) -3\,(-1, 5, 2)$

$= (8, -2, 6) + (3, -15, -6)$

$= (11, -17, 0)$ — **En multipliant par $\frac{1}{2}$**

$\therefore \overrightarrow{C} = \frac{1}{2}\,(11, -17, 0) = (\frac{11}{2}, \frac{-17}{2}, 0)$

Essayez de résoudre

③ Si $\overrightarrow{C} = (2, -3, 1)$ et $\overrightarrow{D} = (0, 2, -2)$

a) Trouver $5\,\overrightarrow{C} - 2\,\overrightarrow{D}$

b) Si $3\,\overrightarrow{A} - 4\,\overrightarrow{D} = \overrightarrow{C}$, trouver $\overrightarrow{A}$

Égalité de deux vecteurs dans l'espace

Si $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ et $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$, alors:

$$\vec{A} = \vec{B} \text{ si et seulement si : } A_x = B_x \,,\quad A_y = B_y \text{ et } \quad A_z = B_z$$

Exemple

4 Trouver la valeur de k , m et n pour que les deux vecteurs $\vec{A} = (k - 4, m^2 - 3 , 1)$ et $\vec{B} = (5, 1, n^2)$ soient égaux

Solution

$\because \quad \vec{A} = \vec{B}$

$\therefore \quad A_x = B_x \longrightarrow k - 4 = 5 \longrightarrow k = 9$

$A_y = B_y \longrightarrow m^2 - 3 = 1 \longrightarrow m^2 = 4 \longrightarrow m = \pm 2$

$A_z = B_z \longrightarrow n^2 = 1 \longrightarrow n = \pm 1$

Essayez de résoudre

4 Si $(2x + 1 \,,\, 5 \,,\, k + 4) = (-1 \,,\, y^2 - 4 \,,\, x + 1)$, trouver la valeur de x , y et k

Vecteur unitaire

Le vecteur unitaire est un vecteur dont la norme est égale à une unité de longueur

Par exemple :

$\vec{A} = (\frac{-3}{13}, \frac{4}{13}, \frac{12}{13})$ est un vecteur unitaire car : $\|\vec{A}\| = \sqrt{(\frac{-3}{13})^2 (\frac{4}{13})^2 + (\frac{12}{13})^2} = 1$

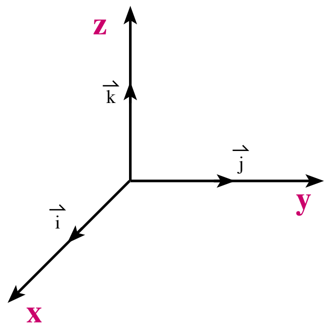
Essayez de résoudre

5 Parmi les vecteurs suivants, lequel est un vecteur unitaire ?

$\vec{A} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ $\qquad \vec{B} = (\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{-\sqrt{5}}{5})$

Vecteurs unitaires de base ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$)

Ce sont des segments orientés ayant pour point d'origine le point d'origine du repère et pour norme une unité de longueur et dont les directions sont les directions positives de l'axe des x , l'axe des y et l'axe des z respectivement. On a :



$\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$

Réflexion critique

Exprimer les vecteurs (–1 ; 0 ; 0) , (0 ; –1 ; 0) et (0 ; 0 ; –1) en fonction des vecteurs unitaires de base.

Exprimer un vecteur en fonction des vecteurs unitaires de base

$\overrightarrow{A} = (A_x, A_y, A_z) \in \mathbb{R}^3$, le vecteur $\overrightarrow{A}$ peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A} &= (A_x, 0, 0) + (0, A_y, 0) + (0, 0, A_z)\\ &= A_x(1, 0, 0) + A_y(0, 1, 0) + A_z(0, 0, 1)\\ &= A_x\,\overrightarrow{i} + A_y\,\overrightarrow{j} + A_z\,\overrightarrow{k}\end{aligned}$$

Exemple

5 Si $\overrightarrow{A} = 2\,\overrightarrow{i} - 3\,\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{B} = -\,\overrightarrow{i} - 2\,\overrightarrow{j}$, trouver :

a $2\overrightarrow{A} - 3\overrightarrow{B}$

b $\|\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}\|$, $\|\overrightarrow{A}\| + \|\overrightarrow{B}\|$ Que peut-on déduire ?

Solution

a $2\overrightarrow{A} - 3\overrightarrow{B} = 2(2\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}) - 3(-\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j})$

$= 4\overrightarrow{i} - 6\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k} + 3\overrightarrow{i} + 6\overrightarrow{j}$

$\therefore 2\overrightarrow{A} - 3\overrightarrow{B} = 7\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{k}$

b $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} = (2\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}) + (-\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j})$

$= \overrightarrow{i} - 5\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$

$\therefore \|\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}\| = \sqrt{1^2 + (-5)^2 + 1^2} = \sqrt{27}$

$\|\overrightarrow{A}\| + \|\overrightarrow{B}\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2} + \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2}$

$= \sqrt{14} + \sqrt{5}$ **On déduit que** $\|\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}\| \neq \|\overrightarrow{A}\| + \|\overrightarrow{B}\|$

Essayez de résoudre

6 Si $\overrightarrow{A} = -3\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k} + 5\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{B} = -2\overrightarrow{k} + 3\overrightarrow{i}$, trouver :

a $3\overrightarrow{A} - 5\overrightarrow{B}$

b $\|\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B}\|$

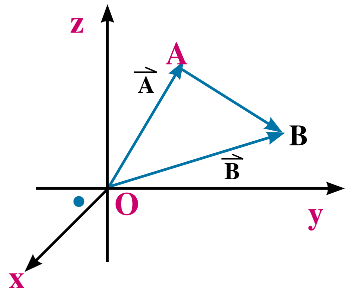
Exprimer un segment orienté dans l'espace en fonction des coordonnées de ses extrémités

Soient A et B deux points dans l'espace. Leurs vecteurs de position par rapport au point d'origine sont $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ respectivement.

$\because \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A}$



Exemple

6 Si A (-2, 3, 1) et B (4, 0, 2) , alors :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A}$$
$$= (4, 0, 2) - (-2, 3, 1) = (6, -3, 1)$$
$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{A} - \overrightarrow{B}$$
$$= (-2, 3, 1) - (4, 0, 2) = (-6, 3, -1)$$

On remarque que : $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

Essayez de résoudre

7 a Si A (2, -3, 0) et B (1, 4, -1) , trouver $\overrightarrow{AB}$

b Si A (1, 1, -2) et $\overrightarrow{AB}$ (4, -1, 2) , trouver les coordonnées du point B

Vecteur de position dans la direction d'un vecteur donné

Si $\overrightarrow{A} = (A_x, A_y, A_z) \in \mathbb{R}^3$, le vecteur unitaire dans la direction du vecteur $\overrightarrow{A}$ est noté $\overrightarrow{e_A}$ est donné par la relation :

$$\overrightarrow{e_A} = \frac{\overrightarrow{A}}{\| \overrightarrow{A} \|}$$

Exemple

7 Si $\overrightarrow{A} = (-2, 2, 1)$ et $\overrightarrow{B} = (3, 1, -2)$, trouver le vecteur unitaire dans la direction de chacun des vecteurs $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$ et $\overrightarrow{AB}$

Solution

$$\overrightarrow{e_A} = \frac{\overrightarrow{A}}{\| \overrightarrow{A} \|} = \frac{(-2, 2, 1)}{\sqrt{4+4+1}} = \left(\frac{-2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{e_B} = \frac{\overrightarrow{B}}{\| \overrightarrow{B} \|} = \frac{(3, 1, -2)}{\sqrt{9+1+4}} = \left(\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}}\right)$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A}$$
$$= (3, 1, -2) - (-2, 2, 1) = (5, -1, -3)$$

$$\therefore \overrightarrow{e_{AB}} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\| \overrightarrow{AB} \|}$$

$$= \frac{(5, -1, -3)}{\sqrt{25+1+9}} = \left(\frac{5}{\sqrt{35}}, \frac{-1}{\sqrt{35}}, \frac{-3}{\sqrt{35}}\right)$$

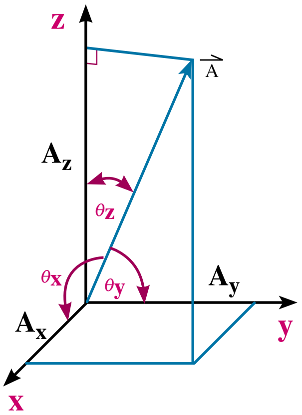
Essayez de résoudre

8 Trouver le vecteur unitaire dans la direction de chacun des vecteurs suivants:

a $\vec{A} = (8, -4, -8)$ **b** $\vec{B} = \vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$ **c** $\vec{C} = 3\vec{i} - 4\vec{k}$

Angles directeurs et les cosinus d'un vecteur dans l'espace

Soit $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ un vecteur dans l'espace. Si $(\theta_x, \theta_y, \theta_z)$ sont les mesures des angles que fait le vecteur $\vec{A}$ et les directions positives de l'axe des x , l'axe des y et l'axe des z, alors :



$A_x = \|\vec{A}\| \cos \theta_x$, $A_y = \|\vec{A}\| \cos \theta_y$ et $A_z = \|\vec{A}\| \cos \theta_z$

$\therefore \vec{A} = \|\vec{A}\| \cos \theta_x \vec{i} + \|\vec{A}\| \cos \theta_y \vec{j} + \|\vec{A}\| \cos \theta_z \vec{k}$

$= \|\vec{A}\| (\cos \theta_x \vec{i} + \cos \theta_y \vec{j} + \cos \theta_z \vec{k})$

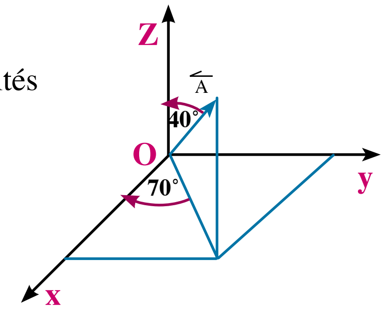
$(\theta_x, \theta_y, \theta_z)$ **sont appelés les angles directeurs du vecteur** $\vec{A}$

$\cos \theta_x$, $\cos \theta_y$ et $\cos \theta_z$ **sont appelés les cosinus des angles directeurs du vecteur** $\vec{A}$

On remarque que : $\cos \theta_x \vec{i} + \cos \theta_y \vec{j} + \cos \theta_z \vec{k}$ représente le vecteur unitaire dans la direction du vecteur $\vec{A}$. Par conséquent $\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1$

Exemple

8 La figure ci-contre représente un vecteur $\vec{A}$ de norme 10 unités de longueur



a Exprimer le vecteur $\vec{A}$ sous la forme algébrique (les composantes cartésiennes).

b Trouver les angles directeurs du vecteur $\vec{A}$

Solution

On décompose $\vec{A}$ en deux composantes: la première est dans la direction de $\overrightarrow{OZ}$ de norme:

$A_z = \|\vec{A}\| \cos \theta_z = 10 \cos 40 \simeq 7{,}66$

la deuxième est dans la direction du plan cartésien XY où :

$A_{x\,y} = \|\vec{A}\| \sin \theta_z = 10 \sin 40 \simeq 6{,}428$

Ensuite, on décompose la composante A_{XY} en deux composantes : la première est dans la direction de $\overrightarrow{OX}$ de norme :

$A_x = A_{x\,y} \cos 70 = 6{,}428 \cos 70 \simeq 2{,}199$

la deuxième est dans la direction de $\overrightarrow{OY}$ de norme :

$A_y = A_{x\,y} \sin 70 = 6{,}428 \sin 70 \simeq 6{,}04$

Donc la forme cartésienne du vecteur $\vec{A}$ est :

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$$
$$= 2{,}199 \vec{i} + 6{,}04 \vec{j} + 7{,}66 \vec{k}$$

Pour trouver les angles directeurs du vecteur $\vec{A}$, on calcule le vecteur unitaire dans la direction de $\vec{A}$

$$\vec{e_A} = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|} = \frac{1}{10}(2{,}199 \vec{i} + 6{,}04 \vec{j} + 7{,}66 \vec{k})$$
$$= 0{,}2199 \vec{i} + 0{,}604 \vec{j} + 0{,}766 \vec{k}$$

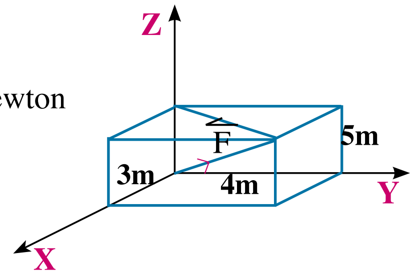
$\therefore \cos\theta_x = 0{,}2199$, **d'où** $\theta_x = \cos^{-1}(0{,}2199) \simeq 77{,}3°$

$\cos\theta_y = 0{,}604$, **d'où** $\theta_y = \cos^{-1}(0{,}604) \simeq 52{,}84°$

$\cos\theta_z = 0{,}766$, **d'où** $\theta_z = \cos^{-1}(0{,}766) \simeq 40°$

Essayez de résoudre

9. La figure ci-contre représente une force $\vec{F}$ d'intensité 200 Newton
   - a. Exprimer la force $\vec{F}$ sous la forme algébrique.
   - b. Trouver les angles directeurs de la force $\vec{F}$.



Exercises 1 - 2

Complete the following:

1. Si $\vec{A}$ = (-3, 4, 2), alors $\|\vec{A}\|$ = ...

2. Si $\vec{A} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{B} = 3\vec{i} - \vec{k}$, alors $\vec{A} - \vec{B}$ = ...

3. Le vecteur unitaire dans la direction de $\overrightarrow{AB}$ où A (-1, 2, 0) et B (3, -1, 2) est ....

4. Le vecteur $\vec{A} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ fait un angle de mesure .... avec la direction positive de l'axe des x .

5. Le vecteur $\vec{B} = \vec{i} + 2\vec{j}$ fait un angle de mesure .... avec la direction positive de l'axe des z .

Choisir la bonne réponse parmi les réponses proposées :

6. Si $\vec{A}$ = (-2, k, 1) et $\|\vec{A}\|$ = 3 unités de longueur, alors k = ...
   - a. 4
   - b. -4
   - c. ± 2
   - d. $\sqrt{14}$

7. Si 30°, 70° et θ sont les angles directeurs d'un vecteur, alors l'une des valeurs de θ est = ...

a) 100° b) 80° c) 260° d) 82,355°

8. Si $\vec{A} = (-1, 5, -2)$ et $\vec{B} = (3, 1, 1)$ et si $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = \vec{i}$, alors $\vec{C}$ = ...

a) $\vec{i} + 6\vec{j} - \vec{k}$ b) $-\vec{i} - 6\vec{j} + \vec{k}$

c) $\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$ d) $\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$

9. Les cosinus des angles directeurs du vecteur $\vec{A} = (-2, 1, 2)$ sont ....

a) (-2, 1, 2) b) $(\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ c) $(\frac{5}{-2}, 5, \frac{5}{2})$ d) (-1, 1, 1)

Répondre aux questions suivantes :

10. Si $\vec{A} = (2, -3, 1)$, $\vec{B} = (4, -2, 0)$ et $\vec{C} = (-6, 0, 3)$, trouver chacun des vecteurs suivants :

a) $\vec{A} + \vec{B}$ b) $3\vec{A} - \frac{1}{3}\vec{C}$ c) $\frac{3}{2}\vec{B} + \frac{2}{3}\vec{C}$

11. Si $\vec{A} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{B} = 4\vec{j} - 2\vec{k}$ et $\vec{C} = 4\vec{i} + 5\vec{j} - 6\vec{k}$, trouver chacun des vecteurs suivants :

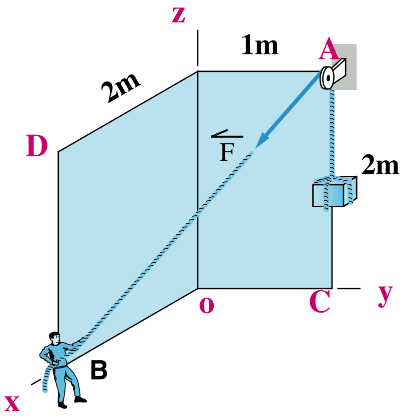
a) $2\vec{A} + \vec{B}$ b) $\frac{1}{2}\vec{B} - \vec{C}$ c) $3\vec{A} - 2\vec{C}$

12. Trouver la norme de chacun des vecteurs suivants :

a) $\vec{A} = (2, -1, 0)$ b) $\vec{B} = (1, 2, -2)$ c) $\vec{C} = \vec{j}$ d) $\vec{D} = \vec{i} - 4\vec{j}$

13. Si $\vec{A} = (k, 0, 0)$ et $\vec{i} = (1, 0, 0)$, démontrer que $\|\vec{A}\| = |k| \, \|\vec{i}\|$

14. Si l'intensités de la tension $\vec{F}$ sur un fil est égale 21 Newton, trouver la composante de $\vec{F}$ dans les directions des trois axes du repère



15. **Question ouverte :** Si le vecteur $\vec{A}$ est parallèle au plan cartésien YZ , que peut-on dire des coordonnées du vecteur $\vec{A}$?

16. **Question ouverte :** Si $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont deux vecteurs dans $\mathbb{R}^3$. a-t-on $\|\vec{A} + \vec{B}\| = \|\vec{A}\| + \|\vec{B}\|$. En cas de l'inégalité, lequel des deux membres est le plus grand ?

17. **Réflexion critique :** Trouver la forme algébrique du vecteur $\vec{A}$ ayant pour norme 5 unités de longueur et faisant avec les trois axes des angles directeurs de même mesure.

Produit des vecteurs

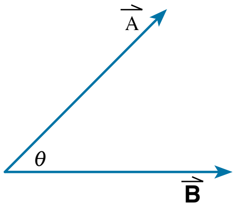
Unité (1)

1 - 3

Nous avons déjà appris à effectuer quelques opérations sur les vecteurs comme l'addition et la multiplication d'un vecteur par un nombre réel. La question qui se pose : Peut-on effectuer la multiplication dans le corps des vecteurs ? La réponse est oui. Il y a deux types de multiplication de vecteurs. Ce sont le produit scalaire et le produit vectoriel de deux vecteurs. Dans cette leçon, nous allons aborder et analyser ces deux types de multiplication, leurs propriétés algébriques et géométriques et leurs applications physiques pour nous aider à étudier la mécanique.

Produit scalaire de deux vecteurs

Réfléchir et discuter

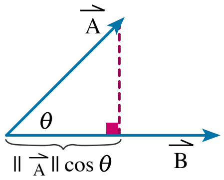


Soient $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ deux vecteurs dont la mesure de l'angle entre eux est θ Trouver :

1- La composante du vecteur $\overrightarrow{A}$ dans la direction du vecteur $\overrightarrow{B}$.

2- Le produit de la norme du vecteur $\overrightarrow{B}$ par la composante du vecteur $\overrightarrow{A}$ dans la direction du vecteur $\overrightarrow{B}$.

De ce qui précède, on déduit que :



1- La composante de $\overrightarrow{A}$ dans la direction de $\overrightarrow{B}$ est égale à $\| \overrightarrow{A} \| \cos\theta$

2- Le produit de la norme du vecteur $\overrightarrow{B}$ par la composante du vecteur $\overrightarrow{A}$ dans la direction du vecteur $\overrightarrow{B}$ est égal à $\| \overrightarrow{B} \| \, \| \overrightarrow{A} \| \cos\theta$

La valeur absolue de ce résultat exprime l'aire d'un rectangle ayant pour dimensions la norme du vecteur $\overrightarrow{B}$ et la composante de $\overrightarrow{A}$ dans la direction de $\overrightarrow{B}$.

À apprendre

Produit scalaire de deux vecteurs

Soient $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ deux vecteurs dont la mesure entre eux est θ . L'aire d'un rectangle ayant pour dimensions la norme de l'un des deux vecteurs et la composante de l'autre dans sa direction est appelée le produit scalaire des deux

A apprendre

- *Produit scalaire de deux vecteurs dans le plan et dans l'espace.*
- *Parallélisme et perpendicularité de deux vecteurs.*
- *Angle entre deux vecteurs.*
- *Composante d'un vecteur dans la direction d'un autre.*
- *Travail fourni par une force.*
- *Produit vectoriel de deux vecteurs dans le plan et dans l'espace.*
- *Signification géométrique du produit vectoriel.*
- *Ensemble droitier des vecteurs unitaires.*
- *Produit mixte*
- *Signification géométrique du produit mixte*

Expressions de base

- *Produit scalaire*
- *Produit vectoriel*
- *Composante*
- *Vecteur unitaire*
- *Travail*
- *Règle de la main droite*
- *Produit mixte*

C'est à dire $\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| \; \|\vec{B}\| \cos \theta$

Exemple

1. Soient $\vec{A}$ et $\vec{B}$ deux vecteurs dont la mesure entre eux est 60°. Si $\|\vec{A}\| = 2\|\vec{B}\| = 8$, trouver $\vec{A} \cdot \vec{B}$

Solution

$\|\vec{A}\| = 2\|\vec{B}\| = 8 \longrightarrow \|\vec{A}\| = 8 , \|\vec{B}\| = 4$

D'après la définition du produit scalaire

$\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| \; \|\vec{B}\| \cos \theta$

$= 8 \times 4 \times \cos 60^\circ = 16$

Essayez de résoudre

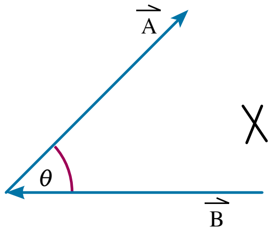
1. Si $\vec{A}$ et $\vec{B}$ deux vecteurs dont la mesure entre eux est 1350° . Si $\|\vec{A}\| = 6$, $\|\vec{A}\| = 10$, trouver $\vec{A} \cdot \vec{B}$

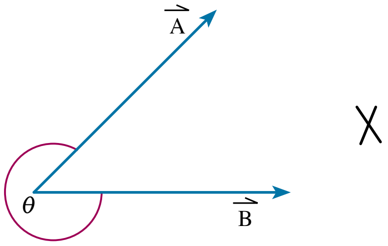
Réflexion critique : Quels sont les cas où le produit scalaire de deux vecteurs est égal à zéro ?

Remarques importantes

1- Pour déterminer l'angle entre deux vecteurs, il faut qu'ils soient partant d'un même point ou arrivant à un même point.

2- La mesure de l'angle entre deux vecteurs appartient à l'intervalle $[0 , \pi]$





Exemple

2. Si $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs unitaires d'un ensemble droitier. Trouver $\vec{i} \cdot \vec{i}$, $\vec{j} \cdot \vec{j}$, $\vec{k} \cdot \vec{k}$

Solution

$\vec{i} \cdot \vec{i} = \|\vec{i}\| \; \|\vec{i}\| \cos 0^\circ$

$= 1 \times 1 \times 1 = 1$

De même $\vec{j} \cdot \vec{j} = 1$, $\vec{k} \cdot \vec{k} = 1$

Rappel

La norme d'un vecteur unitaire est égale à un.

Essayez de résoudre

2. Si $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs unitaires d'un ensemble droitier. Trouver $\vec{i} \cdot \vec{j}$, $\vec{j} \cdot \vec{k}$, $\vec{k} \cdot \vec{i}$

Propriétés du produit scalaire

D'après les exemples précédents, nous pouvons déduire les propriétés du produit scalaire suivantes :

1- $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$

2- $\vec{A} \cdot \vec{A} = \|\vec{A}\|^2$

3- $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ **si et seulement si $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont orthogonaux (condition d'orthogonalité de deux vecteurs).**

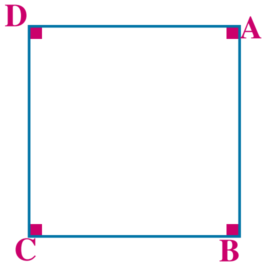
4- $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$ **Propriété de la distributivité**

5- $(k\vec{A}) \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot (k\vec{B}) = k(\vec{A} \cdot \vec{B})$ **où k est un nombre réel**

Exemple

(3) Soit ABCD un carré de longueur de côté 10 cm. Trouver ce qui suit :

(a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}$ (b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ (c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA}$



Solution

(a) $\because$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont parallèles et dans la même direction

$\therefore$ la mesure de l'angle entre eux = 0°

$\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = \|\overrightarrow{AB}\| \; \|\overrightarrow{DC}\| \cos 0°$

$= 10 \times 10 \times 1 = 100$

(b) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux **$\therefore$ la mesure de l'angle entre eux = 90°**

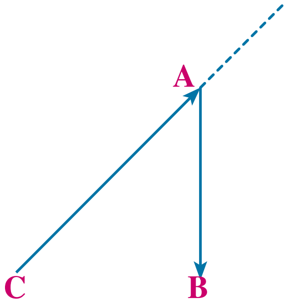
$\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

(c) $\because$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CA}$ **ne partent pas d'un même point, on prolonge $\overrightarrow{CA}$**

$\therefore$ la mesure de l'angle entre eux = 135°

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = \|\overrightarrow{AB}\| \, \|\overrightarrow{CA}\| \cos 135$

$= 10 \times 10\sqrt{2} \times \frac{-1}{\sqrt{2}} = -100$



Autre solution pour la question (c)

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB} \cdot (-\overrightarrow{AC})$

$= -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

$= -\|\overrightarrow{AB}\| \, \|\overrightarrow{CA}\| \cos 45$

$= -10 \times 10\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = -100$

Essayez de résoudre

(3) Soit ABC un triangle équilatéral de longueur de côté 8 cm. Trouver ce qui suit :

(a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ (b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ (c) $(2\overrightarrow{AC}) \cdot (3\overrightarrow{CB})$

À apprendre

Produit scalaire de deux vecteurs dans un repère

Si $\overrightarrow{A} = (A_x \overrightarrow{i} + A_y \overrightarrow{j} + A_z \overrightarrow{k}), B = (B_x \overrightarrow{i} + B_y \overrightarrow{j} + B_z \overrightarrow{k})$ **alors**

$\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = (A_x \overrightarrow{i} + A_y \overrightarrow{j} + A_z \overrightarrow{k}) \cdot (B_x \overrightarrow{i} + B_y \overrightarrow{j} + B_z \overrightarrow{k})$ **En utilisant la propriété de la distributivité**

$$= A_x B_x \overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{i} + A_x B_y \overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} + A_x B_z \overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{k}$$
$$+ A_y B_x \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{i} + A_y B_y \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{j} + A_y B_z \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{k}$$
$$+ A_z B_x \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{i} + A_z B_y \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{j} + A_z B_z \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{k}$$

$\because \quad \overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{k} = 1$

Mais $\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} = \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{k} = \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{i} = 0$

$\therefore \quad \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$

Remarque

Si $\overrightarrow{A} = (A_x , A_y)$ et $\overrightarrow{B} = (B_x , B_y)$ dans un repère :

alors $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = A_xB_x + A_yB_y$

Exemple

(4) Si $\overrightarrow{A} = 2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{B} = -\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$, trouver $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}$

Solution

$$\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = (2, 3, 4) \cdot (-1, -2, 1)$$
$$= 2 \times -1 + 3 \times (-2) + 4 \times 1$$
$$= -2 - 6 + 4 = -4$$

Essayez de résoudre

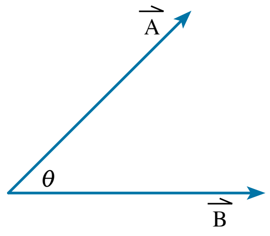
(4) Trouver $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ dans chacun des cas suivants :

a) $\overrightarrow{A} = (-1, 3, 2)$, $\overrightarrow{B} = 4\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + 5\overrightarrow{k}$ Que peu-on déduire ?

b) $\overrightarrow{A} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{i}$

À apprendre

Angle entre deux vecteurs



On sait que $\vec{A} \cdot \vec{B} = \| \vec{A} \| \| \vec{B} \| \cos \theta$

où θ est la mesure de l'angle entre les deux vecteurs

$\vec{A}$ et $\vec{B}$, $0° \leqslant \theta \leqslant 180°$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\| \vec{A} \| \| \vec{B} \|}$$

Cas particuliers:

1- **Si** $\cos \theta = 1$, **alors** $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont parallèles et dans un même sens.

2- **Si** $\cos \theta = -1$, **alors** $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont parallèles et dans deux sens contraires.

3- **Si** $\cos \theta = 0$, **alors** $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont orthogonaux.

Exemple

(5) Trouver la mesure de l'angle entre les deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ tels que

$\vec{A} = 4\,\vec{i} + 3\,\vec{j} + 7\,\vec{k}$, $\vec{B} = 2\,\vec{i} + 5\,\vec{j} + 4\,\vec{k}$.

Solution

$\| \vec{A} \| = \sqrt{4^2 + 3^2 + 7^2} = \sqrt{74}$

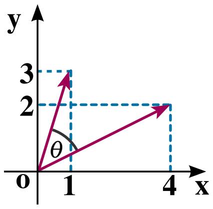
$\| \vec{B} \| = \sqrt{2^2 + 5^2 + 4^2} = \sqrt{45}$

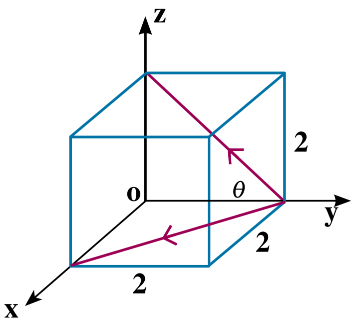
$$\cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\| \vec{A} \| \| \vec{B} \|} = \frac{(4, 3, 7) \cdot (2, 5, 4)}{\sqrt{74}\,\sqrt{45}} = \frac{8 + 15 + 28}{\sqrt{74}\,\sqrt{45}} = \frac{51}{\sqrt{74}\,\sqrt{45}}$$

$$\therefore \cos^{-1} \left(\frac{51}{\sqrt{74}\,\sqrt{45}}\right) = \cos^{-1} (0,8838) = 27,9°$$

Essayez de résoudre

(5) Trouver θ dans chacun des cas suivants :



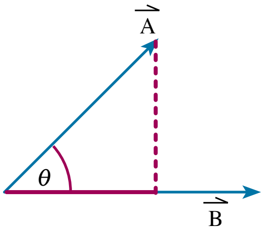


À apprendre

Composante (projection) d'un vecteur dans la direction d'un autre vecteur

Soient $\vec{A}$ et $\vec{B}$ deux vecteurs. La composante du vecteur $\vec{A}$ dans la direction du vecteur $\vec{B}$ (notée A_B) est :

$$A_B = \|\vec{A}\| \cos\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{B}\|}$$



Exemple

6 Trouver la composante de la force $\vec{F} = 2\,\vec{i} - 3\,\vec{j} + 5\,\vec{k}$ dans la direction de $\overrightarrow{AB}$ où A(1, 4, 0) et B(-1, 2, 3)

Solution

$\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A}$

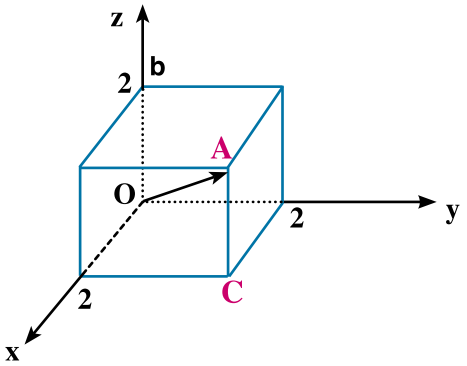
$= (-1, 2, 3) - (1, 4, 0) = (-2, -2, 3)$

La composante de la force $\vec{F}$ dans la direction de $\overrightarrow{AB} = \dfrac{\vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$

$$= \frac{(2, -3, 5) \cdot (-2, -2, 3)}{\sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 3^2}} = \frac{17}{\sqrt{17}} = \sqrt{17}$$

Essayez de résoudre

6 La figure ci-contre représente un cube de longueur d'arête 2 unités de longueur. Trouver la projection du vecteur $\overrightarrow{OA}$ sur le vecteur $\overrightarrow{CB}$

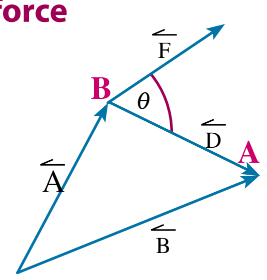


Réflexion critique : Quand est-ce que la composante d'un vecteur dans la direction d'un autre s'annule ?

À apprendre

Utiliser le produit scalaire pour calculer le travail fourni d'une force

Une force $\vec{F}$ agit sur un corps pour effectuer un déplacement $\vec{D}$, on dit que la force a fourni un travail. Nous pouvons calculer le travail fourni en utilisant la relation :



$$W = \vec{F} \cdot \vec{D} = \|\vec{F}\| \, \|\vec{D}\| \cos\theta$$

L'unité de mesure du travail = unité de mesure de la force × unité de mesure du déplacement.

Exemple

7 Une force $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$ Newton agit sur un corps. Elle le déplace du point A(–3 ; 1 ; 0) au point B(2 ; 0 ; –2). Calculer le travail fourni par la force $\overrightarrow{F}$ sachant que le déplacement est calculé en mètre.

Pour votre information

Si l'unité de mesure de la force est le Newton et l'unité de mesure du déplacement est le mètre, alors l'unité de mesure du travail est le Joule

Solution

$\overrightarrow{S} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A}$

$= (2, 0, -2) - (-3, 1, 0)$

$= (5, -1, -2)$

$W = \overrightarrow{F} \bullet \overrightarrow{D}$

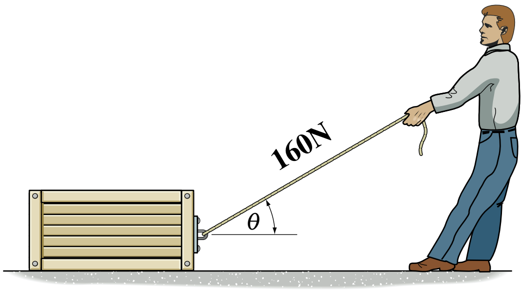
$= (1, -2, 3) \bullet (5, -1, -2) = 1$ Newton.mètre (Joule)

Essayez de résoudre

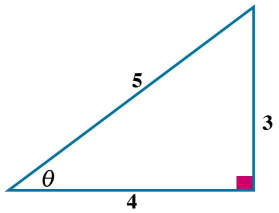
7 Un corps se déplace sous l'effet d'une force $\overrightarrow{F} = -6\overrightarrow{i} + 8\overrightarrow{j}$ du point A(–1 ; 3) au point B(4 ; 7). Calculer le travail fourni par cette force.

Exemple

8 **Dans la figure ci-contre,** une personne tire une boîte par une force de tension d'intensité 160 Newton. La tangente de l'angle que fait la ligne d'action de cette force avec l'horizontale est égale à $\frac{3}{4}$. La boîte se déplace d'une distance horizontale de 5 mètres. Calculer le travail fourni par cette force de tension.



Solution



Travail $= \overrightarrow{F} \bullet \overrightarrow{D}$

$= \| \overrightarrow{F} \| \| \overrightarrow{D} \| \cos\theta$

$= 160 \times 5 \times \frac{4}{5}$

$= 640$ Joule

Essayez de résoudre

8 **Dans la figure ci-contre,** une personne soulève une boîte à l'aide d'une corde passant autour d'une poulie lisse inclinée d'un angle de mesure 30° sur la verticale. Si l'intensité de la tension dans le fil est 120 Newton et la boîte monte d'une distance de 3 mètres, calculer le travail fourni par la force de tension dans le fil.

À apprendre

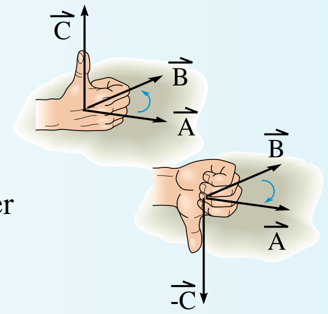
Produit vectoriel de deux vecteurs

Soient $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ deux vecteurs d'un plan dont l'angle entre eux mesure θ. Si $\overrightarrow{e}$ est un vecteur unitaire perpendiculaire au plan contenant les deux vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$, **alors** le produit vectoriel des deux vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ est donné par la relation :

$$\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} = (\| \overrightarrow{A} \| \| \overrightarrow{B} \| \sin \theta) \ \overrightarrow{e}$$

Le sens du vecteur unitaire $\overrightarrow{e}$ (vers le haut ou vers le bas) est déterminé selon la règle de la main droite. Dans cette main, les doigts courbés indiquent le sens de rotation du vecteur $\overrightarrow{A}$ vers le vecteur $\overrightarrow{B}$ et le pouce indique le sens du vecteur unitaire $\overrightarrow{e}$.

Remarques importantes



1- **Si** $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}$ a pour sens $\overrightarrow{e}$, alors $\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{A}$ a pour sens - $\overrightarrow{e}$

Donc $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} = - \overrightarrow{B} \times \overrightarrow{A}$

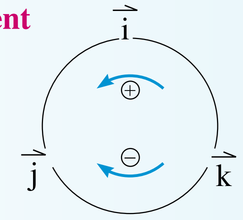
2- En appliquant la règle de la main droite sur un ensemble droitier des vecteurs unitaires orthogonaux **on obtient**

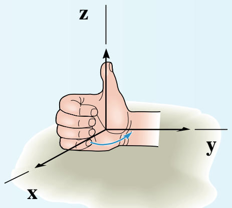
$\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{k} = \overrightarrow{i}$

$\overrightarrow{k} \times \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j}$

$\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{k} = - \overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k} \times \overrightarrow{j} = - \overrightarrow{i}$

$\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{i} = - \overrightarrow{k}$





3- Pour tout vecteur $\overrightarrow{A}$ on a $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{A} = \overrightarrow{O}$ où $\overrightarrow{O}$ est le vecteur nul.

Exemple

9 Soient $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ deux vecteurs d'un plan dont l'angle entre eux mesure 70°.

Si $\| \overrightarrow{A} \| = 15$ et $\| \overrightarrow{B} \| = 17{,}5$, calculer la norme de $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}$

Solution

$\because \ \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} = (\| \overrightarrow{A} \| \ \| \overrightarrow{B} \| \sin \theta) \ \overrightarrow{e}$

$\therefore \ \| \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} \| = \| \overrightarrow{A} \| \ \| \overrightarrow{B} \| \sin \theta = 15 \times 17{,}5 \times \sin 70 = 246{,}67$

Essayez de résoudre

9) Si $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} = -65\ \overrightarrow{e}$ and $\|\overrightarrow{A}\| = 5$ et $\|\overrightarrow{B}\| = 26$, calculer la mesure de l'angle entre les deux vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$

Produit vectoriel dans un repère cartésien

Si $\overrightarrow{A} = (A_x, A_y, A_Z)$, $\overrightarrow{B} = (B_x, B_y, B_Z)$ sont deux vecteurs, **alors**

$$\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} = (A_x \overrightarrow{i} + A_y \overrightarrow{j} + A_Z \overrightarrow{k}) \times (B_x \overrightarrow{i} + B_y \overrightarrow{j} + B_Z \overrightarrow{k})$$

$$= A_x B_x \overrightarrow{i} \times \overrightarrow{i} + A_x B_y \overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j} + A_x B_Z \overrightarrow{i} \times \overrightarrow{k}$$

$$+ A_y B_x \overrightarrow{j} \times \overrightarrow{i} + A_y B_y \overrightarrow{j} \times \overrightarrow{j} + A_y B_Z \overrightarrow{j} \times \overrightarrow{k}$$

$$+ A_Z B_x \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{i} + A_Z B_y \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{j} + A_Z B_Z \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{k}$$

Mais $\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} \times \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{k} = \overrightarrow{O}$

$\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{k} = \overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{k} \times \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j}$, alors

$$\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} = 0 + A_x B_y \overrightarrow{k} + A_x B_Z (-\overrightarrow{j})$$

$$+ A_y B_x (-\overrightarrow{k}) + 0 + A_y B_Z (\overrightarrow{i})$$

$$+ A_Z B_x (\overrightarrow{j}) + A_Z B_y (-\overrightarrow{i}) + 0$$

$$= (A_y B_Z - A_Z B_y) \overrightarrow{i} + (A_Z B_x - A_x B_Z) \overrightarrow{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \overrightarrow{k}$$

La dernière forme peut s'écrire sous la forme d'un déterminant de dimension 3 × 3 comme suit :

$$\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Cas particulier

Si $\overrightarrow{A} = (A_x , A_y)$ et $\overrightarrow{\mathbf{B}} = (B_x , B_y)$ sont deux vecteurs d'un plan cartésien XY, **alors**

$$\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ A_x & A_y & 0 \\ B_x & B_y & 0 \end{vmatrix} = (A_x B_y - A_y B_x) \overrightarrow{k}$$

Exemple

(10) Si $\vec{A} = (-2, 3, 1)$ et $\vec{B} = (1, 2, 4)$ calculer $\vec{A} \times \vec{B}$, puis déduire le vecteur unitaire perpendiculaire au plan contenant les deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$

Solution

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= (3 \times 4 - 2 \times 1)\ \vec{i} - (-2 \times 4 - 1 \times 1)\ \vec{j} + (-2 \times 2 - 3 \times 1)\ \vec{k}$$

$$= 10\ \vec{i} + 9\ \vec{j} - 7\ \vec{k}$$

Le vecteur unitaire perpendiculaire au plan contenant les deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B} = \dfrac{\vec{A} \times \vec{B}}{\| \vec{A} \times \vec{B} \|}$

$$\therefore\ \vec{e} = \frac{10\ \vec{i} + 9\ \vec{j} - 7\ \vec{k}}{\sqrt{10^2 + 9^2 + (-7)^2}} = \frac{10}{\sqrt{230}}\ \vec{i} + \frac{9}{\sqrt{230}}\ \vec{j} - \frac{7}{\sqrt{230}}\ \vec{k}$$

Essayez de résoudre

(10) Soit $\vec{A}$ un vecteur tel que $\| \vec{A} \| = 6$ et si les cosinus des angles directeurs du vecteur $\vec{A}$ sont respectivement $\frac{2}{3}$, $\frac{-2}{3}$ et $\frac{1}{3}$. Si le vecteur $\vec{B}$ est tel que $\vec{B} = (-2\ ;\ 3\ ;\ 5)$, trouver $\vec{A} \times \vec{B}$

Propriétés du produit vectoriel de deux vecteurs

Soient $\vec{A}$ et $\vec{B}$ deux vecteurs d'un plan dont l'angle entre eux mesure θ

1- $\vec{A} \times \vec{B} = - \vec{B} \times \vec{A}$ **(Le produit vectoriel n'est pas commutatif)**

2- $\vec{A} \times \vec{A} = \vec{B} \times \vec{B} = \vec{O}$

3- Si $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{O}$, alors soit $\vec{A} \ /\!/\ \vec{B}$ ou l'un au moins des deux vecteurs est égal $\vec{O}$

4- $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) + (\vec{A} \times \vec{C})$ **Propriété de la distributivité**

5- $(k\vec{A}) \times \vec{B} = \vec{A} \times (k\vec{B}) = k(\vec{A} \times \vec{B})$ **où k est un nombre réel**

Parallélisme de deux vecteurs

D'après les propriétés du produit vectoriel des vecteurs, deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont parallèles si et seulement si $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{O}$

C'est à dire si $(A_y B_Z - A_Z B_y)\,\vec{i} + (A_Z B_x - A_x B_Z)\,\vec{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\,\vec{k} = \vec{O}$

Donc $A_y B_Z = A_Z B_y$, $A_x B_Z = A_Z B_x$ et $A_x B_y = A_y B_x$

Donc $\dfrac{A_y}{B_y} = \dfrac{A_z}{B_z}$, $\dfrac{A_x}{B_x} = \dfrac{A_z}{B_z}$, $\dfrac{A_x}{B_x} = \dfrac{A_y}{B_y}$

Donc $\dfrac{A_x}{B_x} = \dfrac{A_y}{B_y} = \dfrac{A_z}{B_z}$

Si chaque rapport est égal à k , on obtient

$A_x = k\,B_x,\ A_y = k\,B_y,\ A_z = k\,B_z$

$\because \vec{A} = A_x\,\vec{i} + A_y\,\vec{j} + A_z\,\vec{k}$

$\therefore \vec{A} = k\,\vec{B}$

Si $k > 0$, les deux vecteurs sont parallèles et dans le même sens et si $k < 0$, les deux vecteurs sont parallèles et dans deux sens contraires.

Exemple

(11) Si le vecteur $\vec{A} = (2\,\vec{i} - 3\,\vec{j} + m\,\vec{k})$ est parallèle au vecteur $\vec{B} = (\vec{i} + k\,\vec{j} + 8\,\vec{k})$, trouver la valeur de m et k

Solution

$\because \vec{A} \,//\, \vec{B}$ $\qquad \therefore \dfrac{A_x}{B_x} = \dfrac{A_y}{B_y} = \dfrac{A_z}{B_z}$

$\therefore \dfrac{2}{1} = \dfrac{-3}{k} = \dfrac{m}{8}$ $\qquad \therefore k = \dfrac{1 \times -3}{2} = \dfrac{-3}{2}$ et $m = \dfrac{2 \times 8}{1} = 16$

Essayez de résoudre

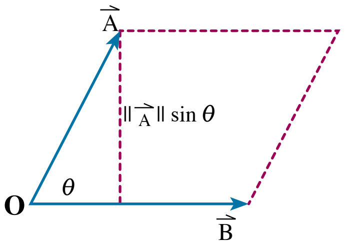
(11) Soient $\vec{A}$ et $\vec{B}$ tels que $\vec{A} = (2, -3)$, $\vec{A} \,//\, \vec{B}$ et $\|\vec{B}\| = 3\sqrt{13}$, trouver $\vec{B}$.

Signification géométrique du produit vectoriel de deux vecteurs

On sait que $\|\vec{A} \times \vec{B}\| = \|\vec{A}\|\,\|\vec{B}\| \sin\theta$

$= \|\vec{B}\| \times L$

où $L = \|\vec{A}\| \sin\theta$



= L'aire du parallélogramme où $\vec{B}$ et $\vec{A}$ sont deux côtés consécutifs

= Le double de l'aire du triangle où $\vec{B}$ et $\vec{A}$ sont deux côtés

Exemple

(12) Si $\vec{A} = (-3, 1, 2)$ et $\vec{B} = (3, 4, -1)$, trouver l'air du parallélogramme dont $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont deux côtés consécutifs.

Solution

$$\vec{A} \times \vec{B} = (-3, 1, 2) \times (3, 4, -1)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = (-9)\vec{i} + 3\vec{j} - 15\vec{k}$$

$$\|\vec{A} \times \vec{B}\| = \sqrt{(-9)^2 + (3)^2 + (-15)^2} = 3\sqrt{35}$$

$\therefore$ L'aire du parallélogramme $= 3\sqrt{35}$ unité d'aire.

Essayez de résoudre

(12) Si $\vec{A} = (1, 2, -4)$ et $\vec{B} = (0, 5, -1)$, trouver l'air du triangle dont $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont deux côtés.

À apprendre

Produit mixte

Soient $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$ trois vecteurs. Le produit $\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C}$ est appelé "Produit mixte". Ce produit est souvent utilisé dans le domaine de la statique (on remarque l'absence des parenthèses dans la définition car effectuer le produit scalaire en premier n'a pas de sens).

Soient $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$, $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$, $\vec{C} = (C_x, C_y, C_z)$

Alors $\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C}$

$$= (A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}) \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

$$= (A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}) \cdot [(B_y C_z - B_z C_y)\vec{i} - (B_x C_z - B_z C_x)\vec{j}$$

$$+ (B_x C_y - B_y C_x)\vec{k}]$$

$$A_x (B_y C_z - B_z C_y) - A_y(B_x C_z - B_z C_x) + A_z(B_x C_y - B_y C_x)$$

$$= \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

Propriétés du produit mixte

1- La valeur du produit mixte ne change pas si on permute les vecteurs dans un ordre cyclique.

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

Remarquez l'ordre cyclique des vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$

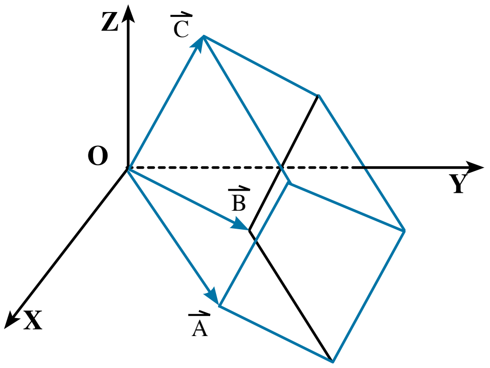
2- Si les vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$ sont situés dans un même plan, alors le produit mixte s'annule

On a donc $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = 0$

Signification géométrique du produit mixte

Si $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$ sont trois vecteurs formant trois arêtes non parallèles d'un parallélépipède, alors le volume du parallélépipède = la valeur absolue du produit mixte .

On a donc Volume du parallélépipède = $|\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C}|$



Exemple

(13) Trouver le volume d'un parallélépipède tel que trois côtés consécutifs sont représentés par les vecteurs $\vec{A} = (2, 1, 3)$, $\vec{B} = (-1, 3, 2)$ et $\vec{C} = (1, 1, -2)$

Solution

Volume du parallélépipède = $|\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C}|$ **(1)**

$$\therefore \vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -28$$

donc Volume du parallélépipède = $|-28| = 28$ unités de volume

Essayez de résoudre

(13) Trouver le volume d'un parallélépipède tel que trois arêtes non parallèles sont représentées par les vecteurs $\vec{A} = (3, -4, 1)$, $\vec{B} = (0, 2, -3)$ et $\vec{C} = (3, 2, 2)$

Exercises 1 - 3

Compléter ce qui suit : Sachant que $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ est un ensemble droitier de vecteurs unitaires :

1. $\vec{i} \cdot \vec{j}$ = ...
2. $\vec{j} \times \vec{k}$ = ...
3. Si $\vec{A} = (2, -1)$, $\vec{B} = (3, -4)$, alors la composante de $\vec{A}$ dans la direction de $\vec{B}$ est égale à ....
4. Si $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont deux vecteurs non nuls et si $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$, alors $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont ....
5. Si $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont deux vecteurs non nuls et si $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{O}$, alors $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont ....
6. La mesure de l'angle entre les deux vecteurs $3\vec{i} - \vec{j}$, $-4\vec{i} + 6\vec{j}$ est égale à ....
7. Le travail fourni par la force $\vec{F} = 3\vec{i} + 7\vec{k}$ pour déplacer un corps du point A(1 , 1, 2) au point B(7 , 3, 5) est égal à ....

Choisir la bonne réponse parmi les réponses proposées :

8. $\vec{i} \times \vec{j}$ = ...
   a) $\vec{O}$ b) 0 c) 1 d) $\vec{k}$
9. Si $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont deux vecteurs unitaires orthogonaux, alors $(\vec{A} - 2\vec{B}) \cdot (3\vec{A} + 5\vec{B})$ =
   a) -8 b) -7 c) 24 d) 0
10. Si $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont deux vecteurs unitaires, alors $\vec{A} \cdot \vec{B} \in$ ....
    a)]0, 1[b)]-1, 1[c) [-1, 1] d) $\mathbb{R}^+$
11. La mesure de l'angle entre les deux vecteurs (2 , -2, 2) et (1, 1, 4) est égale à ....
    a) 57,02° b) 35,26° c) 134,37° d) 0°
12. Si les deux vecteurs (2 , k , -3) et (4 , 6, -6) sont parallèles, alors k = ...
    a) 6 b) 3 c) -3 d) 1

Répondre aux questions suivantes :

13. Trouver $\vec{A} \cdot \vec{B}$ dans chacun des cas suivants :
    a) $\vec{A} = (5, 1, -2)$, $\vec{B} = (4, -4, 3)$
    b) $\vec{A} = -3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{B} = 6\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$
    c) $\vec{A} = \vec{i}$, $\vec{B} = 2\vec{j} - \vec{k}$

14 Trouver la mesure de l'angle entre les deux vecteurs dans chacun des cas suivants :

a (5 , 1, -2) , (1 , 1, -1) **b** (7 , 2 , -10) , (2 , 6 , 4)

c (2 , 1 , 4) , (1, -2, 0)

15 Trouver $\vec{A} \times \vec{B}$ dans chacun des cas suivants :

a $\vec{A} = (-2 , 3 , 1)$, $\vec{B} = (1 , 3 , -4)$

b $\vec{A} = -\vec{i} - 2\vec{j}$, $\vec{B} = 3\vec{j} - 5\vec{k}$

c $\|\vec{A}\| = 6$, $\|\vec{B}\| = 8$ et la mesure de l'angle entre les deux vecteurs est 60°.

16 Soit ABCD un carré de longueur de côté 12 cm. Si $\vec{e}$ est un vecteur unitaire perpendiculaire au plan du carré, trouver :

a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ **b** $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CA}$ **c** $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD}$

d $\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{AC}$ **e** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ **f** $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}$

17 Trouver un vecteur unitaire perpendiculaire au plan contenant les deux vecteurs .

$\vec{A} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{B} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$

18 Calculer l'aire du triangle DEF dans chacun des cas suivants :

a D(5 , 1 , -2) , E (4 , -4 , 3) , F (2 , 4 , 0)

b D (4 , 0 , 2) , E (2 , 1 , 5) , F (-1 , 0 , -1)

19 Calculer l'aire du parallélogramme LMNE dans chacun des cas suivants :

a L (1 , 1) , M (2 , 3) , N(5 , 4) **b** L (2 , 1 , 3) , M (1 , 4 , 5) , N(2 , 5 , 3)

20 Calculer le volume d'un parallélépipède dans lequel les vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$ représentent trois arêtes consécutives sachant que :

$\vec{A} = (1 , 1 , 3)$, $\vec{B} = (2 , 1 , 4)$, $\vec{C} = (5 , 1 , -2)$

21 Dans chacun des cas suivants, montrer si les deux vecteurs donnés sont parallèles , orthogonaux ou aucun de ces deux cas :

a $\vec{A} = (0 , 2, 2)$, $\vec{B} = (3 , 0 , -4)$

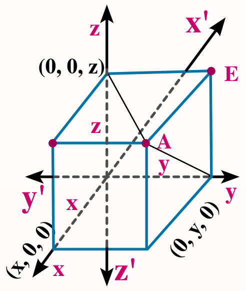
b $\vec{E} = 10\vec{i} + 40\vec{j}$, $\vec{F} = -3\vec{j} + 8\vec{k}$

c $\vec{A} = -2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{B} = 8\vec{i} - 4\vec{j} + 8\vec{k}$

Résumé de l'unité

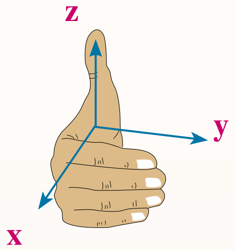
Repère orthogonal dans trois dimensions

Les coordonnées d'un point A sont déterminées dans l'espace, , en déterminant la projection de ce point sur chaque axe du repère .



Règle de la main droite

Dans cette règle, les doigts courbés dans la figure indiquent le passage de la direction positive de l'axe des x vers la direction positive de l'axe des y et la pouce indique la direction positive de l'axe des z



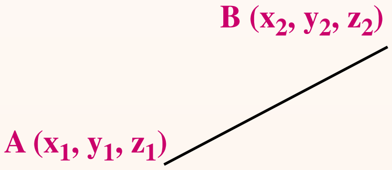
Plans des repères

- Le plan cartésien XY a pour équation $z = 0$
- Le plan cartésien XZ a pour équation $y = 0$
- Le plan cartésien YZ a pour équation $x = 0$

Distance entre deux points

Soient $A(x_1 ; y_1 ; z_1)$ et $B(x_2 ; y_2 ; z_2)$ deux points dans l'espace. La distance entre les deux points A et B est donnée par la relation

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



Coordonnées du milieu d'un segment

Soient $A(x_1 ; y_1 ; z_1)$ et $B(x_2 ; y_2 ; z_2)$ deux points dans l'espace. Les coordonnées du milieu du segment $\overline{AB}$ sont $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$

Equation d'une sphère dans l'espace

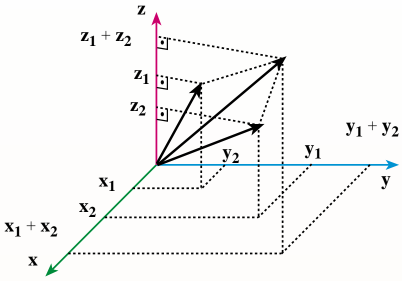
L'équation d'une sphère ayant pour centre (k ; m ; n) et pour rayon r est

$$(x - k)^2 + (y - m)^2 + (z - n)^2 = r^2$$

- L'équation d'une sphère ayant pour centre le point d'origine et pour rayon r est $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$
- L'équation générale d'une sphère est : $x^2 + y^2 + y^2 + 2\,kx + 2\,my + 2\,nz + d = 0$ où $(-k , -m , -n)$ est son centre et $\sqrt{k^2 + m^2 + n^2 - d}$ est la longueur de son rayon r

Vecteur de position dans l'espace

Si A(Ax ; Ay ; Az) est un point dans l'espace, alors son vecteur de position par rapport au point d'origine est
$\vec{A} = (A_x , A_y, A_z)$



- A_x est appelée la composante du vecteur $\vec{A}$ dans la direction de l'axe des x
- A_y est appelée la composante du vecteur $\vec{A}$ dans la direction de l'axe des y
- A_z est appelée la composante du vecteur $\vec{A}$ dans la direction de l'axe des z

Norme d'un vecteur

Si $\vec{A} = (A_x , A_y, A_z)$ alors $\| \vec{A} \| = \sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2 + (A_z)^2}$

Addition et soustraction de vecteurs dans l'espace

Si $\vec{A} = (A_x , A_y , A_Z)$ et $\vec{B} = (B_x , B_y , B_Z)$, alors:

1- $\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x, A_y + B_y, A_Z + B_Z)$

2- $\vec{A} - \vec{B} = (A_x - B_x, A_y - B_y, A_Z - B_Z)$

Propriétés de l'addition

1- $\vec{A} + \vec{B} \in R^3$ — **Stabilité**

2- $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$ — **Commutativité**

3- $(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$ — **Associativité**

4- $\vec{A} + \vec{O} = \vec{O} + \vec{A} = \vec{A}$ — **Élément neutre pour l'addition**

5- $\vec{A} + (-\vec{A}) = (-\vec{A}) + \vec{A} = \vec{O}$ — **Opposé**

Multiplication d'un vecteurs par un nombre réel

Si $\vec{A} = (A_x , A_y, A_Z)$ et $k \in \mathbb{R}$ alors $k\vec{A} = (kA_x , kA_y, kA_Z)$

Egalité de vecteurs dans l'espace

Si $(A_x\ ,\ A_y,\ A_Z) = (B_x\ ,\ B_y,\ B_Z)$, alors: $A_x = B_x$, $A_y = B_y$ et $A_Z = B_Z$

Vecteur unitaire

C'est un vecteur dont la norme est égale à une unité de longueur

Vecteurs unitaires de base

$\vec{i} = (1\ ,\ 0\ ,\ 0)$ Vecteur unitaire dans la direction positive de l'axe des x

$\vec{j} = (0\ ,\ 1\ ,\ 0)$ Vecteur unitaire dans la direction positive de l'axe des y

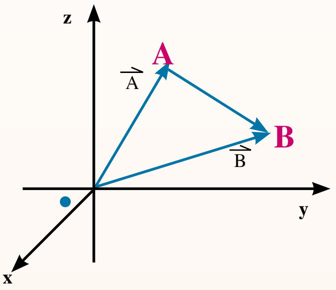
$\vec{j} = (0\ ,\ 0,\ 1)$ Vecteur unitaire dans la direction positive de l'axe des z

Exprimer un vecteur en fonction des vecteurs unitaires de base

Si $\vec{A} = (A_x\ , A_y, A_z)$, le vecteur $\vec{A}$ peut s'écrire sous la forme $\vec{A} = A_x\ \vec{i}\ + A_y\ \vec{j}\ + A_z\ \vec{k}$

Exprimer un segment orienté dans l'espace en fonction des coordonnées de ses extrémités

Si A et B deux points dans l'espace de vecteurs de position $\vec{A}$ et $\vec{B}$ respectivement , alors $\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A}$



Vecteur de position dans la direction d'un vecteur donné

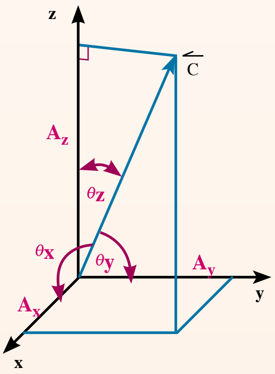
Si $\vec{A} = (A_x\ , A_y, A_z)$, le vecteur $\vec{e_A}$ est appelé le vecteur unitaire dans la direction du vecteur $\vec{A}$ Il est donné par la relation

$$\vec{U_A} = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}$$

Angles directeurs et les cosinus des angles directeurs d'un vecteur dans l'espace

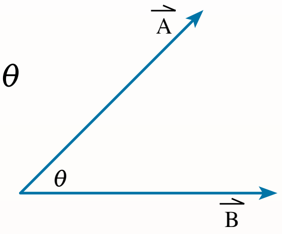
Si $(\theta_x\ ,\ \theta_y\ ,\ \theta_z)$ sont les mesures des angles que fait le vecteur $\vec{A} = (A_x\ , A_y, A_z)$ avec les directions positives de l'axe des x , l'axe des y et l'axe des z, respectivement alors :

- $A_x = \|\vec{A}\| \cos\theta_x$, $A_y = \|\vec{A}\| \cos\theta_y$ et $A_z = \|\vec{A}\| \cos\theta_z$
- $(\theta_x\ ,\ \theta_y,\ \theta_z)$ sont appelés les angles directeurs du vecteur $\vec{A}$
- $\cos\theta_x$, $\cos\theta_y$ et $\cos\theta_z$ sont appelés les cosinus des angles directeurs du vecteur $\vec{A}$
- $\cos\theta_x\ \vec{i}\ + \cos\theta_y\ \vec{j}\ + \cos\theta_z\ \vec{k}$ représente le vecteur unitaire dans la direction du vecteur $\vec{A}$



- $\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta_z = 1$

Produit scalaire de deux vecteurs



Soient $\vec{A}$ et $\vec{B}$ deux vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ dont la mesure entre eux est θ où $0 \leqslant \theta \leqslant 180^\circ$, alors $\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| \, \|\vec{B}\| \cos\theta$

• Propriétés du produit scalaire

1- $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$ **Commutativité**

2- $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$ **Distributivité**

3- Si k est un nombre réel, alors $(k\vec{A}) \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot (k\vec{B}) = k(\vec{A} \cdot \vec{B})$

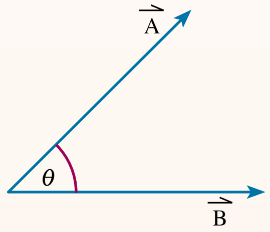
4- $\vec{A} \cdot \vec{A} = \|\vec{A}\|^2$

5- $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ alors $\vec{A} \perp \vec{B}$

Produit scalaire de deux vecteurs dans un repère orthogonal

Si $\vec{A} = (A_x, A_y, A_Z)$ et $\vec{B} = (B_x, B_y, B_Z)$ alors $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_Z B_Z$

• Angle entre deux vecteurs



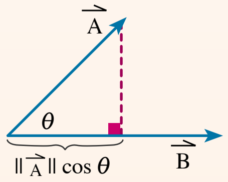
$$\cos\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{A}\| \, \|\vec{B}\|}$$

- Si $\cos\theta = 1$, alors $\vec{A} \,//\, \vec{B}$ et ils sont dans un même sens
- Si $\cos\theta = -1$, alors $\vec{A} \,//\, \vec{B}$ et ils sont dans deux sens contraires
- Si $\cos\theta = 0$, alors $\vec{A} \perp \vec{B}$

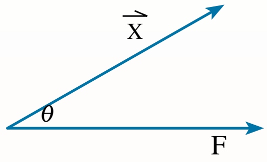
Composante d'un vecteur dans la direction d'un autre vecteur

La composante du vecteur $\vec{A}$ dans la direction du vecteur $\vec{B}$ (notée A_B)

$$A_B = \|\vec{A}\| \cos\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{B}\|}$$



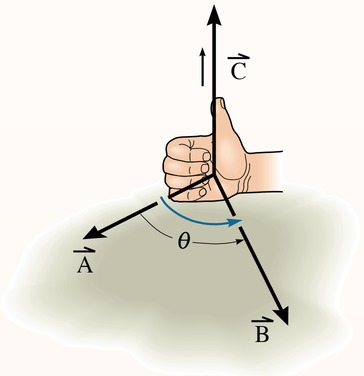
Travail fourni par une force $\vec{F}$ pour effectuer un déplacement f



Le travail = $\vec{F} \cdot \vec{D} = \| \vec{F} \| \| \vec{D} \| \cos\theta$

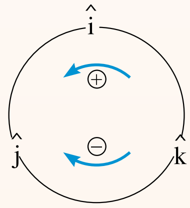
- Si la force $\vec{F}$ est dans le même sens que le déplacement $\vec{D}$ $(\theta = 0°)$, alors $W = \| \vec{F} \| \| \vec{D} \|$
- Si la force $\vec{F}$ et le déplacement $\vec{D}$ sont dans deux sens contraires $(\theta = 180°)$, alors $W = -\| \vec{F} \| \| \vec{D} \|$
- Si la force $\vec{F}$ est orthogonale au déplacement $\vec{D}$, alors $(\theta = 90°)$, alors $W = 0$

Produit vectoriel de deux vecteurs



Soient $\vec{A}$ et $\vec{B}$ deux vecteurs dans R^3 dont l'angle entre eux mesure θ , alors $\vec{A} \times \vec{B} = (\| \vec{A} \| \| \vec{B} \| \sin\theta)\ \vec{e}$ où $\vec{e}$ est un vecteur unitaire perpendiculaire au plan contenant les deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$. Le sens du vecteur unitaire $\vec{e}$ (vers le haut ou vers le bas) est déterminé selon la règle de la main droite. Dans cette main, les doigts courbés indiquent le sens de rotation du vecteur $\vec{A}$ vers le vecteur $\vec{B}$ et le pouce indique le sens du vecteur unitaire $\vec{e}$.

• Propriété du produit vectoriel de deux vecteurs



1- $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$

2- $\vec{A} \times \vec{A} = 0$

3- $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$ Distributivité

4- Si $\vec{A} \times \vec{B} = 0$, alors soit $\vec{A} \,/\!/\, \vec{B}$ ou l'un au moins des deux vecteurs est égal $\vec{O}$

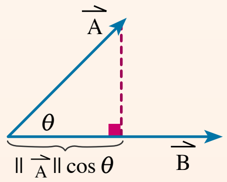
5- $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$, $\quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$

$\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$, $\quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$, $\quad \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$

Produit vectoriel de deux vecteurs dans un repère cartésien

Si $\vec{A} = (A_x , A_y, A_Z)$ et $\vec{B} = (B_x , B_y, B_Z)$ sont deux vecteurs, alors :

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$



Cas particulier : Produit vectoriel de deux vecteurs dans un plan cartésien XY

Si $\vec{A} = (A_x\,,\ A_y)$ et $\vec{B} = (B_x\,,\ B_y)$, alors:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} \vec{k} = (A_x B_y - A_y B_x)\ \vec{k}$$

Vecteur unitaire perpendiculaire au plan des vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$

$$\vec{C} = \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{\|\vec{A} \times \vec{B}\|}$$

Parallélisme de deux vecteurs

Deux vecteurs $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ et $\vec{B} = (B_x\,, B_y, B_z)$ s'ils vérifient l'une des conditions suivantes :

1- $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{O}$

2- $\frac{A_x}{B_x} = \frac{A_y}{B_y} = \frac{A_z}{B_z}$

3- $\vec{A} = k\ \vec{B}$

Si $k > 0$, les deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont parallèles et dans le même sens.

Si $k < 0$, les deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont parallèles et dans deux sens contraires.

Signification géométrique du produit vectoriel de deux vecteurs

$\|\vec{A} \times \vec{B}\|$ = L'aire du parallélogramme où $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont deux côtés consécutifs.

= Le double de l'aire du triangle où $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont deux côtés.

Produit mixte

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

Signification géométrique du produit mixte

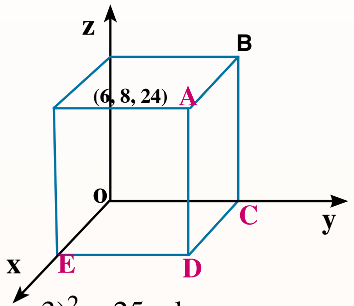
Si $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$ sont trois vecteurs formant trois arêtes non parallèles d'un parallélépipède, alors le volume du parallélépipède = la valeur absolue du produit mixte $\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C}$

Exercices généraux

Compléter ce qui suit :

1) Le point (2 ; 0 ; –3) est situé au plan cartésien .... qui a pour équation ....

2) La figure ci-contre représente un parallélépipède rectangle. Si A(6 ; 8 ; 24), alors :



a) les coordonnées du point D sont ....

b) les coordonnées du point C sont ....

c) les angles directeurs du vecteur $\overrightarrow{OD}$ sont ....

3) Si A(-1 , 2 , 3) et B(4 , -1 , 5), alors $\overrightarrow{AB}$ = ...

4) Si le point (-2 , 4 , m) est situé sur la sphère $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 25$, alors m = ...

5) Si $\overrightarrow{A} = (k, 3, -4)$, $\overrightarrow{B} = (-2 , 9 , m)$ et si $\overrightarrow{A} \,//\, \overrightarrow{B}$, alors k = ... et m = ...

6) Si $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = \| \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} \|$, alors la mesure de l'angle entre les deux vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ est égale à ....

Choisir la bonne réponse parmi les réponses proposées :

7) Les deux axes $\overleftrightarrow{xx'}$, $\overleftrightarrow{zz'}$ forment le plan cartésien ayant pour équation ....

a) $x = 0$ b) $y = 0$ c) $z = 0$ d) $y = 2$

8) L'équation de la sphère ayant pour centre le point d'origine et passant par le point (3 ; –1 ; 2) est ....

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ b) $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 14$

c) $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = \sqrt{14}$ d) $x^2 + y^2 + z^2 = 14$

9) Les coordonnées du milieu du segment $\overline{DE}$ où D(2 ; 3 ; 3) et E(6 ; –1 ; 4) est ....

a) $(4 , 2 , 3\frac{1}{2})$ b) $(2 , 1 , \frac{1}{2})$ c) $(4 , 1 , -\frac{1}{2})$ d) $(4 , 1 , \frac{1}{2})$

10) Si $\overrightarrow{A} \,//\, \overrightarrow{B}$, alors $\| \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} \|$= ....

a) 0   b) 1   c) $\| \overrightarrow{A} \|$ d) $\| \overrightarrow{B} \|$

11) Parmi les vecteurs suivants, le vecteur unitaire est ....

a) $(-3 , 2 , 2)$ b) $(\frac{1}{2} , \frac{1}{3} , \frac{1}{4})$ c) $(\frac{3}{5} , \frac{-4}{5} , 0)$ d) $(\frac{-1}{12} , \frac{-3}{12} , \frac{2}{12})$

12 Si K , E et F sont les cosinus des angles directeurs d'un vecteur $\overrightarrow{A}$ alors:

a $K + E + F = 1$ b $K = E = F$ c $K^2 + E^2 + F^2 = 1$ d $K + E + F = \| \overrightarrow{A} \|$

13 Si $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} = \overrightarrow{O}$, $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = 0$, alors $\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{C} =$ ....

a 0 b 1 c $\overrightarrow{A}$ d $\| \overrightarrow{B} \|$

14 Les plans cartésiens xy et yz se coupent ....

a au point d'origine b à l'axe des x c à l'axe des y d à l'axe des z

Répondre aux questions suivantes :

15 Démontrer que le triangle ayant pour sommets (7 ; 1 ; 3) , (5 . 3 . 4) et (3 ; 5 ; 3) est isocèle .

16 Déterminer le centre et la longueur du rayon du cercle qui a pour équation $x^2 + y^2 + z^2 = 6z$

17 Si A (-2 , 3, 5) et B (1 , 4 , -2) , trouver $\overrightarrow{AB}$

18 Si $\overrightarrow{C} = (1 , -2 , 2)$, trouver le vecteur unitaire de $\overrightarrow{C}$

19 Si le vecteur $\overrightarrow{A}$ fait avec les directions positives des axes x , y et z des angles de mesure 60° , 80° et θ° respectivement où θ est un angle aigu

a trouver la valeur de θ

b écrire la forme algébrique du vecteur $\overrightarrow{A}$ sachant que $\| \overrightarrow{A} \| = 13$

20 Si $\overrightarrow{A} = (1 , 6 , 2)$, $\overrightarrow{B} = (k, 3 , m)$ et $\overrightarrow{C} = (k, m , k + m)$ et si $\overrightarrow{A} \, // \, \overrightarrow{B}$, trouver $\| \overrightarrow{C} \|$

21 Soient $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ sont deux vecteurs unitaires dans $\mathbb{R}^3$. Sous quelle condition le produit vectoriel $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}$ représente-t-il un vecteur unitaire dans $\mathbb{R}^3$. Expliquer votre réponse.

22 Soit ABCD un rectangle tel que AB = 6 cm et BC = 8 cm. Trouver :

a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ b $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$

c le composante de $\overrightarrow{CD}$ dans la direction de $\overrightarrow{BC}$

23 Trouver le travail fourni par la force $\overrightarrow{F} = (2 , -3, 5)$ pour déplacer un corps du point (1 ; –1 ; 0) au point (2 ; 4 ; –2).

24 Trouver le travail fourni par un corps de poids 40 Newton se déplaçant verticalement vers le haut d'une distance de 10 mètres sur la surface de la terre

25 Sachant que les deux vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$, appartiennent à $\mathbb{R}^3$, Démontrer ce qui suit :

a $\| \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} \|^2 + | \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} |^2 = \| \overrightarrow{A} \|^2 \| \overrightarrow{B} \|^2$

b Si $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = 0$, $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} = \overrightarrow{O}$ alors soit $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{O}$ or $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{O}$

Pour plus d'activité, visiter le site : www.sec3mathematics.com.eg

Épreuve cumulative

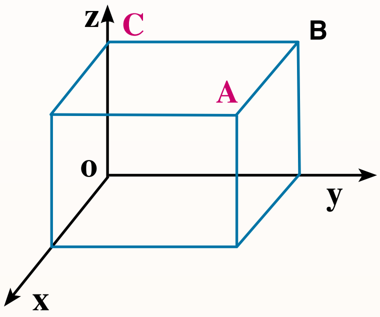
Compléter ce qui suit :

1. La distance du point (–4 ; –3 ; 2) au plan YZ est égale à .... unités de longueur

2. Si le point (a – 2 ; b + 3 ; c – 4) est situé au plan cartésien XY , alors b = ...

3. Si A(–1 ; 0 ; –2) et B(5 ; –1 ; 4), alors les coordonnées du milieu de $\overline{AB}$ sont ....

4. La figure ci-contre représente un parallélépipède rectangle.
Si A(5 ; 8 ; 4), alors
   - **a** Les coordonnées du point B sont ....
   - **b** Les coordonnées du point C sont ....



5. L'équation du cercle ayant pour centre (1 ; –3 ; –1) et passant par le point (–2 ; –1 ; –1) est ....

6. Si $\vec{A}$ = (-2, 3, 1), $\vec{B}$ = (0 , 2, -2) et $\vec{C}$ = (1, -3, 5) , alors $2\vec{A} - 3\vec{B} + \vec{C}$ = ...

7. Si $\vec{A}$ = (5, -2 , 3), alors le vecteur unitaire de $\vec{A}$ est égal à ....

Choisir la bonne réponse parmi les réponses proposées :

8. Si $\vec{A}$ = (3, -2, m) et $\|\vec{A}\| = \sqrt{22}$, alors m = ...
   a 21 **b** ± 9 **c** ± 3 **d** 17

9. Si $\vec{A} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ et $\vec{B} = 4\vec{i} - \vec{j}$, alors $\vec{A} \cdot \vec{B}$ =
   a 5 **b** 4 **c** ± 3 **d** 2

10. Si $\vec{A} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$, alors la composante de $\vec{A}$ dans la direction de l'axe des y est égale à ....
   a 4 **b** 3 **c** -3 **d** 5

11. Si $\vec{A}$ = (2 , 3 , -1) et $\vec{B} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, alors la composante de $\vec{A}$ dans la direction de $\vec{B}$ est égale à ....
   a 18 **b** $\frac{18}{5}$ **c** $-\frac{18}{5}$ **d** $\frac{18}{25}$

12. Si les angles directeurs d'un vecteur sont 45° , 45° et θ , alors θ = ...
   a 45° **b** 90° **c** 0° **d** 60°

Répondre aux questions suivantes :

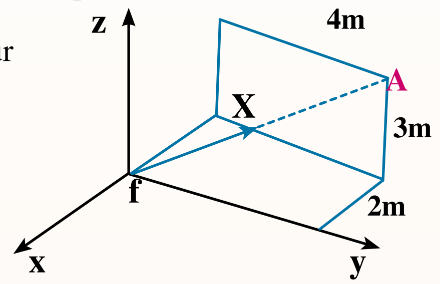
13 Démontrer que le triangle ayant pour sommets (2 ; 2 ; 1) , (0 . 0 . 0) et (2 ; –4 ; 4) est rectangle puis calculer son aire.

14 Trouver l'équation de la sphère de centre (0 ; 4 ; 0) sachant qu'il est tangent au plan cartésien XZ

15 Si $\overrightarrow{A} = (1\ ,\ -3,\ 2)$ et $\overrightarrow{B} = (0\ ,\ 2\ ,\ 3)$, trouver $\|\overrightarrow{A}\|$, $\|\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}\|$

16 Trouver la forme algébrique du vecteur $\overrightarrow{A}$ ayant pour norme $21\sqrt{3}$ et faisant des angles de même mesure avec les directions positives des trois axes du repère.

17 Trouver les composantes de la force $\overrightarrow{F}$ ayant pour intensité $12\sqrt{29}$ Newton



18 Si $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{B} = 3\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + 5\overrightarrow{k}$, trouver

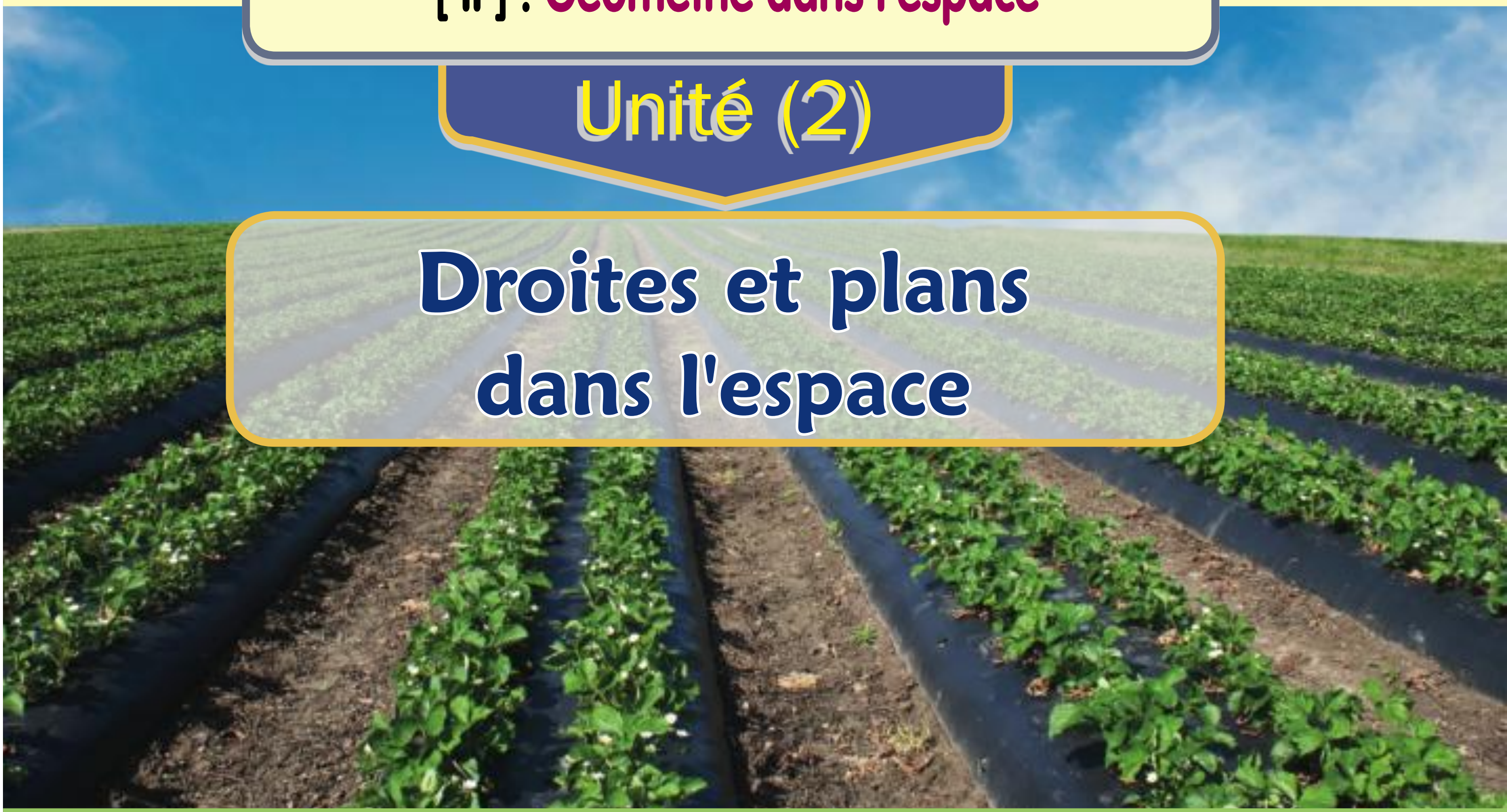
a $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}$ b $(2\overrightarrow{A}) \times (3\overrightarrow{B})$ c $\overrightarrow{A} \times (\overrightarrow{C} - 2\overrightarrow{B})$

19 **Réflexion créative :** Si A(0 ; 0 ; 1) , B(1 ; 0 ; 0) et C(0 ; 1 ; 0) , trouver un vecteur unitaire perpendiculaire au plan ABC

20 Trouver les mesures des angles que fait le vecteur $\overrightarrow{C} = 3\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j} + 5\overrightarrow{k}$ avec les directions positives des trois axes du repère.

Unité (2)

Droites et plans dans l'espace



Introduction de l'unité

Vous avez étudié dans l'unité précédente la localisation d'un point dans l'espace ainsi que les vecteurs de position et comment trouver leurs normes. Ceci est considéré comme la base de cette unité puisqu'elle complète ce qui a été étudié dans l'unité précédente et de ce qui a été étudié l'an dernier. Dans cette unité, l'élève va étudier l'équation d'une droite dans l'espace ainsi que l'équation d'un plan dans ses différentes formes. Les exemples et les méthodes de résolutions sont variés pour atteindre les objectifs cognitifs et les compétences qui aident l'élève à s'approprier les connaissances et les autres conceptions liées à la géométrie dans l'espace dans les niveaux scolaires ultérieurs.

Objectifs de l'unité

Après l'étude de l'unité, et après avoir réalisé les activités, il est attendu que l'élève soit capable de:

- Trouver un vecteur directeur d'une droite dans l'espace.
- Trouver une équation paramétrique et une équation vectorielle d'une droite dans l'espace.
- Trouver une équation cartésienne d'une droite dans l'espace.
- Trouver l'équation générale d'un plan dans l'espace.
- Trouver l'équation standard d'un plan dans l'espace.
- Identifier l'angle entre deux plans.
- Déduire la condition de la perpendicularité de deux plans.
- Déduire la condition du parallélisme de deux plans dans l'espace.
- Trouver l'équation de la droite d'intersection de deux plans dans l'espace.
- Déterminer la distance entre un point et une droite dans l'espace.
- Trouver la distance entre un point et un plan en utilisant le produit scalaire et la forme cartésienne.
- Déterminer la distance entre deux plans parallèles.

Expressions de base

- *Vecteur directeur*
- *Angles directeurs*
- *Cosinus des angles directeurs*
- *Rapports directeurs*
- *Équation vectorielle*
- *Équation paramétrique*
- *Équation cartésienne*
- *Équation générale*
- *Proportionnel*
- *Deux droites parallèles*
- *Deux droites perpendiculaires*
- *Deux droites sécantes*
- *Deux droites non coplanaires*
- *Distance perpendiculaire*
- *Plan*
- *Forme standard*
- *Deux plans parallèles*
- *Deux plans perpendiculaires*
- *Deux plans sécants*
- *Angle*

Matériel utilisé

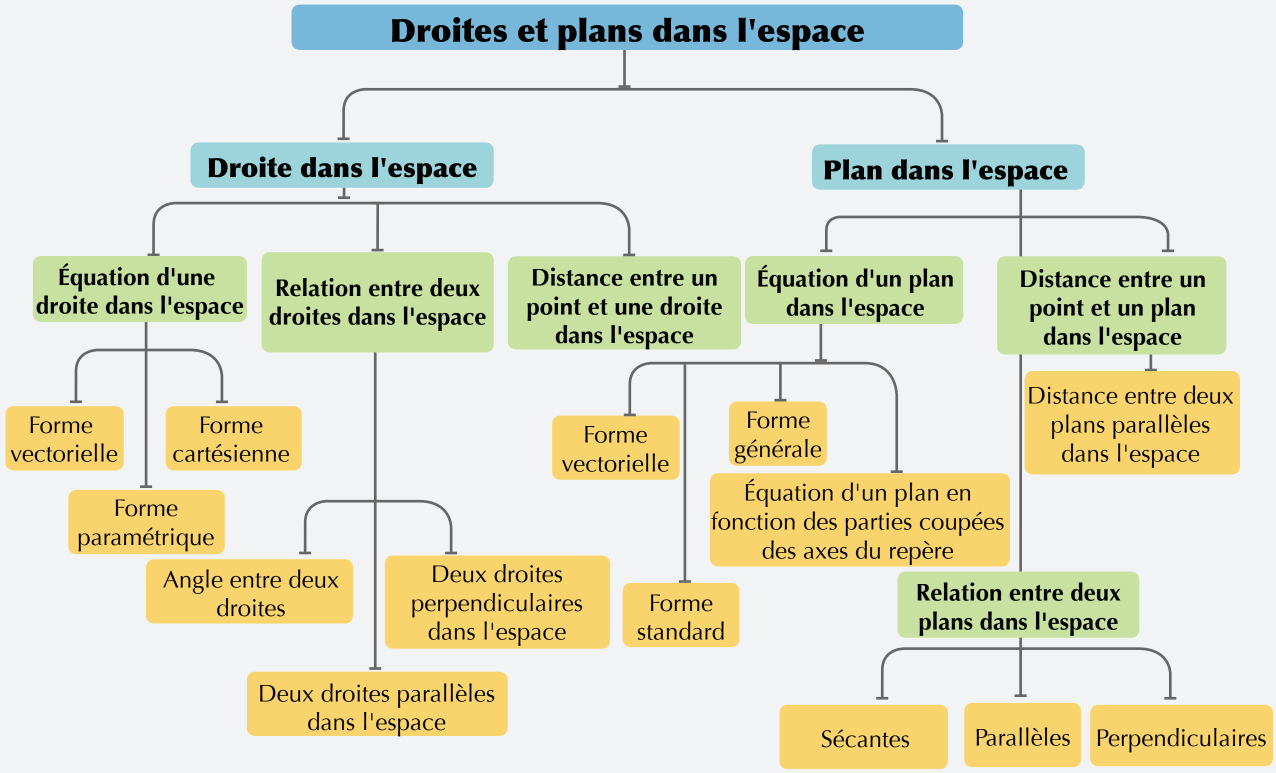
- *Calculatrice graphique*
- *Logiciels de graphisme à trois dimensions*

Leçons de l'unité

Leçon (2 - 1): Équation d'une droite dans l'espace.

Leçon (2 - 2): Équation d'un plan dans l'espace.

Organigramme de l'unité



Unité 2

2 - 1

Équation d'une droite dans l'espace

A apprendre

- Vecteur directeur d'une droite.
- Différentes formes de l'équation d'une droite.
- Angle entre deux droites.
- Distance entre un point et une droite.
- Droites parallèles.
- Droites perpendiculaires

Expressions de base

- Vecteur directeur
- Équations paramé-triques
- Équations cartésiennes
- Angles directeurs
- Rapports directeurs

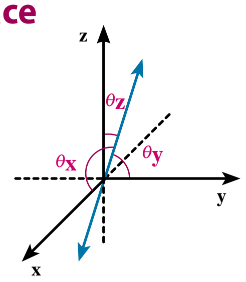
Matériel utilisé

- Calculatrice scientifique
- Logiciels de graphisme à trois dimensions

Les années précédentes, vous avez déjà fait des études sur la droite dans le plan et comment trouver les différentes formes de son équation (forme vectorielle - forme paramétrique - forme cartésienne). Dans cette leçon, nous allons étudier la droite dans l'espace et comment trouver son équation dans ses différentes formes vu l'importance de ce thème dans le domaine de la géométrie ; l'architecture et les applications de l'astronomie

À apprendre

Vecteur directeur d'une droite dans l'espace



Soient θ_x, θ_y, θ_z les angles directeurs d'une droite dans l'espace.**Donc** cos θ_x, cos θ_y et cos θ_z sont les cosinus des angles directeurs de cette droite. Ces cosinus sont notés L ; M et N respectivement

Donc $L = \cos\theta_x$, $M = \cos\theta_y$, $N = \cos\theta_z$

On a $L^2 + M^2 + N^2 = 1$

Le vecteur $\vec{e} = L\vec{i} + M\vec{j} + N\vec{k}$ est le vecteur unitaire dans la direction de la droite

Tout vecteur parallèle au vecteur unitaire $\vec{e}$ est appelé vecteur directeur de la droite et on le note $\vec{d}$

On a $\vec{d} = k(L\vec{i} + M\vec{j} + N\vec{k}) = (a\,;\, b;\, c)$ où a ; b et c sont proportionnels à L

M ; N ; $k \in \mathbb{R}^+$

a ; b et c sont appelés les rapports directeurs de la droite.

Par exemple, si $(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{2}{3})$ sont les cosinus des angles directeurs d'une droite, alors le vecteur $\vec{d} = k(\frac{2}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{2}{3})$ représente un vecteur directeur de la droite où $k \neq 0$

En posant $k = 3 \longrightarrow \vec{d} = (2;\, 1;\, 2)$

En posant $k = -6 \longrightarrow \vec{d} = (-4; -2; -4)$

Par conséquent, une droite admet une infinité de vecteurs directeurs parallèles et chacun de ces vecteurs est parallèles à la droite.

Exemple

1 Trouver un vecteur directeur de la droite passant par les deux points A (-2 ; 3; 1) et B (0 ; 4 ; -2)

Solution

Un vecteur directeur de la droite = $\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = (0 ; 4 ; -2) - (-2 ; 3 ; 1)$

$\therefore \vec{d} = (2 ; 1 ; -3)$

Essayez de résoudre

1 Trouver un vecteur directeur de chacune des droites suivantes:

a La droite passant par le point d'origine et par le point A (-1 ; 2 ; -2)

b La droite passant par les deux points C (0 ; -2 ; 3) et D (1 ; 1 ; -1)

Réflexion critique :

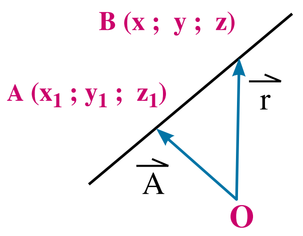
1- Que peut-on dire d'une droite ayant pour vecteur directeur $\vec{d} = (a ; b ; 0)$?

2- Trouver un vecteur directeur pour chacun des trois axes du repère.

À apprendre

Forme vectorielle de l'équation d'une droite dans l'espace

Soit D une droite dans l'espace de vecteur directeur $\vec{d} = (a ; b ; c)$ et passant par un point A de vecteur de position $\vec{A} = (x_1, y_1, z_1)$ Si B est un point quelconque de la droite de vecteur de position $\vec{B} = (x ; y ; z)$; **alors**



D'après la figure, on a : $\vec{r} = \vec{A} + \overrightarrow{AB}$

Mais $\overrightarrow{AB} \mathbin{//} \vec{d} \longrightarrow (\overrightarrow{AB} = k\,\vec{d})$

$\therefore$ $\vec{r} = \vec{A} + k\,\vec{d}$ $\longrightarrow$ C'est la forme vectorielle de l'équation d'une droite.

Exemple

2 Trouver la forme vectorielle de l'équation de la droite passant par le point (3 ; –1 ; 0) et ayant pour vecteur directeur (–2 ; 4 ; 3).

Solution

(3 ; -1 ; 0) **est un point de la droite** $\therefore \vec{A} = (3 ; -1 ; 0)$

(-2 ; 4 ; 3) **est un vecteur directeur de la droite** $\therefore \vec{d} = (-2 ; 4 ; 3)$

L'équation vectorielle de la droite est $\vec{r} = \vec{A} + k\,\vec{d}$

$\therefore \vec{r} = (3 ; -1 ; 0) + k(-2 ; 4 ; 3) \longrightarrow$ est l'équation vectorielle de la droite.

Remarque: k est un nombre réel qui n'exprime pas un nombre fixe et unique mais il peut prendre des valeurs réelles différentes. k dans ce cas est appelé un paramètre. Chaque valeur de ce paramètre permet de trouver un point de la droite.

Par exemple, si $k = 1$; **alors** $\vec{r} = (1 ; 3 ; 3)$ représente le vecteur de position d'un point sur la droite

si $k = 2$; **alors** $\vec{r} = (-1 ; 7 ; 6)$ représente le vecteur de position d'un autre point sur la droite

Essayez de résoudre

(2) Trouver la forme vectorielle de l'équation de la droite passant par le point (4 ; –2 ; 5) et ayant pour vecteur directeur (1 ; –2 ; 2). Trouver ensuite un autre point sur la droite.

À apprendre

Équation paramétrique d'une droite dans l'espace

L'équation vectorielle d'une droite est de la forme $\vec{r} = \vec{A} + k\,\vec{d}$

En substituant $\vec{r} = (x ; y ; z)$; $\vec{A} = (x_1 ; y_1 ; z_1)$ et $\vec{d} = (a ; b ; c)$

On obtient: $(x ; y ; z) = (x_1 ; y_1 ; z_1) + k\,(a ; b ; c)$

D'où $(x = x_1 + ka ; y = y_1 + kb ; z = z_1 + kc)$ $\longrightarrow$ est l'équation paramétrique d'une droite

Exemple

(3) Trouver l'équation paramétrique de la droite passant par le point (2 ; –1 ; 3) et ayant pour vecteur directeur (4 ; –2 ; 5).

Solution

$\vec{r} = (2 ; -1 ; 3) + k\,(4 ; -2 ; 5)$ $\longrightarrow$ **est la forme vectorielle de l'équation de la droite**

$\therefore\ (x ; y ; z) = (2 ; -1 ; 3) + k\,(4 ; -2 ; 5)$

$\therefore\ x = 2 + 4k \quad ; \quad y = -1 - 2k \quad \text{et} \quad z = 3 + 5k$

Essayez de résoudre

(3) Trouver l'équation paramétrique de la droite passant par le point d'origine et ayant pour vecteur directeur (-2 ; 3 ; 1).

À apprendre

Équation cartésienne d'une droite dans l'espace

D'après l'équation paramétrique de la droite:

$x = x_1 + k\,a,\ y = y_1 + kb,\ z = z_1 + k\,c$ $\qquad \therefore\ \dfrac{x - x_1}{a} = k\ ;\ \dfrac{y - y_1}{b} = k\ ;\ \dfrac{z - z_1}{c} = k$

$\therefore\ \dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{y - y_1}{b} = \dfrac{z - z_1}{c}$ $\longrightarrow$ est la forme cartésienne de l'équation de la droite.

où a, b et c sont non nuls.

Remarques

1- Si a = 0 par exemple, la forme cartésienne de l'équation de la droite est $x = x_1$ et $\frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$

2- Vous avez appris que l'équation d'une droite dans le plan est de la forme ax + by + c = 0 . Par conséquent, certains pensent que l'équation d'une droite dans l'espace est de la forme ax + by + cz = 0 , ce qui est une erreur fréquente car cette dernière est l'équation d'un plan dans l'espace comme nous allons l'étudier dans les leçons suivantes.

3- Comme les rapports directeurs a, b et c sont proportionnels aux cosinus des angles directeurs L, M et N, alors nous pouvons écrire la forme cartésienne de l'équation de la droite sous la forme $\frac{x - x_1}{L} = \frac{y - y_1}{M} = \frac{z - z_1}{N}$

Exemple

4 Trouver les différentes formes de l'équation de la droite passant par les deux points (2 ; -1 ; 5) et (-3 ; 1 ; 4).

Solution

Un vecteur directeur de la droite $\vec{d}$ = (-3 ; 1 ; 4) - (2 ; -1 ; 5) = (-5 ; 2 ; -1)

∴ **La forme vectorielle de l'équation de la droite est** $\vec{r}$ = (2 ; -1 ; 5) + k (-5 ; 2 ; -1)

L'équation paramétrique de la droite est x = 2 - 5k ; y = -1 + 2k ; z = 5 - k

La forme cartésienne est $\frac{x - 2}{-5} = \frac{y + 1}{2} = \frac{z - 5}{-1}$

Essayez de résoudre

4 Trouver les différentes formes de l'équation de la droite passant par les deux points (3 ; 2 ; 0) et (–1 ; 3 ; 4).

Exemple

5 Trouver les différentes formes de l'équation de la droite $\frac{3x + 1}{2} = \frac{y - 1}{2} = \frac{5 - z}{3}$

Solution

Soit $\frac{3x + 1}{2} = \frac{y - 1}{2} = \frac{5 - z}{3} = k$

∴ $\frac{3x + 1}{2} = k$ d'où $x = \frac{-1}{3} + \frac{2}{3}k$

$\frac{y - 1}{2} = k$ d'où $y = 1 + 2k$

$\frac{5 - z}{3} = k$ d'où $z = 5 - 3k$

} **Équations paramétriques de la droite**

D'après les équations paramétriques, nous pouvons écrire l'équation:

$$(x ; y ; z) = (-\frac{1}{3} ; 1 ; 5) + t(\frac{2}{3} ; 2 ; -3)$$

D'où $\vec{r} = (-\frac{1}{3} ; 1 ; 5) + t(\frac{2}{3} ; 2 ; -3)$ est la forme vectorielle

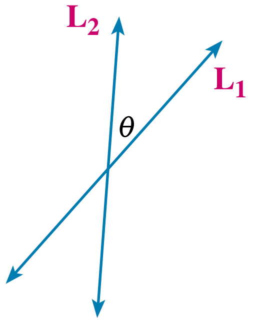
Remarquez que : les rapports directeurs sont $(\frac{2}{3} ; 2 ; -3)$ ou (2 ; 6 ; -9)

Essayez de résoudre

5 Trouver les différentes formes de l'équation de la droite $\frac{x+4}{3} = \frac{2y+5}{2} = \frac{4-z}{4}$, puis trouver un point appartenant à cette droite

À apprendre

Angle entre deux droites dans l'espace



Soient L_1 et L_2 deux droites dans l'espace de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{d_1} = (a_1 ; b_1 ; c_1)$ et $\overrightarrow{d_2} = (a_2 ; b_2 ; c_2)$. La mesure du plus petit angle entre les deux droites est donnée par la relation:

$$\cos\theta = \frac{|\overrightarrow{d_1} \bullet \overrightarrow{d_2}|}{\|\overrightarrow{d_1}\| \|\overrightarrow{d_2}\|} ; 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$$

Si $(L_1 ; M_1 ; N_1)$ et $(L_2 ; M_2 ; N_2)$ sont les cosinus des angles directeurs des deux droites, alors:

$$\cos\theta = |L_1 L_2 + M_1 M_2 + N_1 N_2|$$

Exemple

6 Trouver la mesure de l'angle entre les deux droites $\overrightarrow{r_1} = (2 ; -1; 3) + k_1 (-2 ; 0 ; 2)$ et $x = 1$, $\frac{y-4}{3} = \frac{z+5}{-3}$

Solution

D'après l'équation de la première droite $\overrightarrow{d_1} = (-2 ; 0 ; 2)$

D'après l'équation paramétrique de la deuxième droite $\overrightarrow{d_2} = (0 ; 3 ; -3)$

$$\therefore \cos\theta = \frac{|\overrightarrow{d_1} \bullet \overrightarrow{d_2}|}{\|\overrightarrow{d_1}\| \|\overrightarrow{d_2}\|} = \frac{|(-2 ; 0 ; 2) \bullet (0 ; 3 ; -3)|}{\sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 2^2}\sqrt{0^2 + 3^2 + (-3)^2}}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{8}\ \sqrt{18}} = \frac{1}{2} \qquad \therefore \theta = 60^\circ$$

Essayez de résoudre:

6 Trouver la mesure de l'angle entre les deux droites:

$L_1 : x = 2 - 5k, y = 1 - k ; z = 3 + 4k$ et $L_2 : \frac{x+1}{3} = \frac{2-y}{4} = \frac{z}{2}$

Exemple

7 Trouver la mesure de l'angle entre les deux droites dont les cosinus des angles directeurs sont $(\frac{5}{13\sqrt{2}} ; \frac{-12}{13\sqrt{2}} ; \frac{1}{\sqrt{2}})$ et $(\frac{-3}{5\sqrt{2}} ; \frac{4}{5\sqrt{2}} ; \frac{1}{\sqrt{2}})$

Solution

$(L_1, M_1, N_1) = (\frac{5}{13\sqrt{2}} ; \frac{-12}{13\sqrt{2}} ; \frac{1}{\sqrt{2}})$ et $(L_2, M_2, N_2) = (\frac{-3}{5\sqrt{2}} ; \frac{4}{5\sqrt{2}} ; \frac{1}{\sqrt{2}})$

$\therefore \cos\theta = |L_1L_2 + M_1M_2 + N_1N_2|$

$$= \left| \frac{5}{13\sqrt{2}} \times \frac{-3}{5\sqrt{2}} + \frac{-12}{13\sqrt{2}} \times \frac{4}{5\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \right|$$

$$= \left| \frac{-15}{130} + \frac{-48}{130} + \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{65}$$

$$\therefore \ \theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{65}\right) = 89° \ 7' \ 6''$$

Essayez de résoudre

7) Trouver la mesure de l'angle entre les deux droites dont les cosinus des angles directeurs sont $\left(\frac{2}{3} ; \frac{-2}{3} ; \frac{1}{3}\right)$ et $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} ; \frac{1}{\sqrt{2}} ; 0\right)$

À apprendre

Deux droites parallèles dans l'espace

Soient L_1 et L_2 deux droites dans l'espace de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{d_1} = (a_1 ; b_1 ; c_1)$ et $\overrightarrow{d_2} = (a_2 ; b_2 ; c_2)$. $L_1 \,//\, L_2$ si et seulement si $\overrightarrow{d_1} \,//\, \overrightarrow{d_2}$.

Cette condition peut être vérifiée par plusieurs formes

1- $\overrightarrow{d_1} = k \, \overrightarrow{d_2}$ **2-** $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ **3-** $\overrightarrow{d_1} \times \overrightarrow{d_2} = \overrightarrow{0}$

Remarques:

1- Si les deux droites sont parallèles et un point appartenant à l'une d'elles vérifie l'équation de l'autre, alors les deux droites sont confondues.

2- Si $\overrightarrow{d_1}$ n'est pas parallèle à $\overrightarrow{d_2}$, alors L_1 et L_2 sont sécantes ou non coplanaires.

Exemple

8) Démontrer que les deux droites $\overrightarrow{r_1} = \overrightarrow{j} + k_1(\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k})$

et $\overrightarrow{r_2} = (\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}) + k_2(-2\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j})$

se coupent en un seul point puis déterminer leur point d'intersection

Solution

$\overrightarrow{d_1} = (1 ; 2 ; -1)$; $\overrightarrow{d_2} = (-2 ; -2, 0)$

$\because \ \frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$; $\frac{b_1}{b_2} = \frac{2}{-2} = -1$ $\therefore \ \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

$\therefore$ Les deux droites ne sont pas parallèles. Pour démontrer que les deux droites sont sécantes en un seul point, on cherche une valeur de k_1 et une valeur de k_2 telles que $\overrightarrow{r_1} = \overrightarrow{r_2}$

$\therefore \ \overrightarrow{j} + k_1(\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}) = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k} + k_2(-2\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j})$ En égalisant les coefficients

$\therefore \ k_1 = 1 - 2k_2$ d'où $k_1 + 2k_2 = 1$ **(1)**

$2k_1 = -2k_2$ d'où $k_1 + k_2 = 0$ **(2)**

$-k_1 = 1$ d'où $k_1 = -1$ **(3)**

De (3) en (1) $k_2 = 1$

Ces valeurs vérifient l'équation (2).

$\therefore$ Les deux droites sont sécantes en un point et le vecteur de position de leur point d'intersection est :

$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{j} - 1(\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}) = -\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ **d'où** (-1 ; -1 ; 1)

Essayez de résoudre

8 Démontrer que les deux droites $\overrightarrow{r_1} = (3 ; -3 ; 5) + k_1 (0 ; -5 ; 5)$

et $\overrightarrow{r_2} = (-2 ; 3 ; 1) + k_2 (5 ; -1 ; -1)$

sont perpendiculaires et se coupent en un seul point puis déterminer leur point d'intersection.

À apprendre

Deux droites perpendiculaires dans l'espace

Soient L_1 et L_2 deux droites dans l'espace de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{d_1} = (a_1 ; b_1; c_1)$ et $\overrightarrow{d_2} = (a_2; b_2; c_2)$ On a :

$L_1 \perp L_2$ si et seulement si $\overrightarrow{d_1} \cdot \overrightarrow{d_2} = 0$

Exemple

9 Démontrer que les deux droites $\overrightarrow{r_1} = (1; 2; 4) + k_1 (2 ; -1 ; 1)$ et $\overrightarrow{r_2} = (1 ; 1 ; 1) + k_2(-2 ; 7 ; 11)$ sont perpendiculaires puis démontrer qu'elles sont non coplanaires.

Solution

$\overrightarrow{d_1} = (2 ; -1 ; 1) \longrightarrow$ est un vecteur directeur de la première droite

$\overrightarrow{d_2} = (-2 ; 7 ; 11) \longrightarrow$ est un vecteur directeur de la deuxième droite

$\therefore \overrightarrow{d_1} \cdot \overrightarrow{d_2} = (2 ; -1 ; 1) \cdot (-2 ; 7 ; 11)$

$= 2 \times (-2) + (-1) \times 7 + 1 \times 11$

$= -4 - 7 + 11$

$= 0$ $\therefore$ Les deux droites sont perpendiculaires

Pour démontrer que les deux droites sont non coplanaires, on démontre qu'il n'existe pas de valeurs de k_1 et k_2 telles que $\overrightarrow{r_1} = \overrightarrow{r_2}$

On pose $(1 ; 2 ; 4) + k_1 (2 ; -1 ; 1) = (1 ; 1 ; 1) + k_2 (-2 ; 7 ; 11)$ En égalisant les coefficients :

$\therefore$ $1 + 2k_1 = 1 - 2k_2$ d'où $k_1 + k_2 = 0$ **(1)**

$2 - k_1 = 1 + 7k_2$; d'où $-k_1 - 7k_2 = -1$ **(2)**

$4 + k_1 = 1 + 11k_2$; d'où $k_1 - 11k_2 = -3$ **(3)**

Des deux équations (1) et (2), on obtient $k_1 = \frac{-1}{6}$ et $k_2 = \frac{1}{6}$ Ces deux valeurs ne vérifient pas l'équation (3).

$\therefore$ Les deux droites sont non coplanaires.

Essayez de résoudre

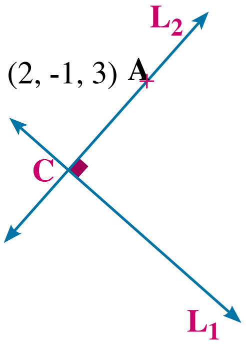
9 Démontrer que les deux droites

$\overrightarrow{r_1} = (3 ; -1 ; 2) + k_1 (4 ; 1 ; 3)$ et $\overrightarrow{r_2} = (0 ; 4 ; -1) + k_2 (1 ; -1 ; 2)$ sont non coplanaires.

Exemple

(10) Trouver une équation de la droite passant par le point (2 ; –1 ; 3) , coupant la droite $\vec{r_1} = (1\ ;\ -1\ ;\ 2) + k\,(2\ ;\ 2\ ;\ -1)$ et lui est perpendiculaire.

Solution



Supposons que les deux droites se coupent au point C

∵ C appartient à la droite L_1 (la droite donnée)

∴ C peut s'écrire sous la forme:

C (1 + 2k ; -1 + 2k ; 2 - k)

Un vecteur directeur de la droite L_2 (la droite cherchée) est

$\vec{d_2} = \overrightarrow{AC} = \vec{C} - \vec{A}$

∴ $\vec{d_2} = (2k - 1\ ;\ 2k\ ;\ -k - 1)$

∵ $\vec{d_1} = (2\ ;\ 2\ ;\ -1)$

et ∵ les deux droites sont perpendiculaires ∴ $\vec{d_1} \bullet \vec{d_2} = 0$

∴ $(2\ ;\ 2\ ;\ -1) \bullet (2k - 1\ ;\ 2k\ ;\ -k - 1) = 0$

∴ $4k - 2 + 4k + k + 1 = 0$

∴ $9k = 1$ d'ou $k = \frac{1}{9}$

∴ $\vec{d_2} = (\frac{-7}{9}\ ;\ \frac{2}{9}\ ;\ \frac{-10}{9}) = (-7\ ;\ 2\ ;\ -10)$

∴ L'équation de la droite L_2 est $\vec{r} = (2\ ;\ -1\ ;\ 3) + k_2\,(-7\ ;\ 2\ ;\ -10)$

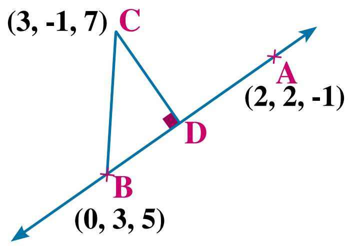
Essayez de résoudre

(10) Trouver une équation de la droite passant par le point d'origine, coupant la droite $\vec{r} = (3\ ;\ 1\ ;\ 4) + k\,(2\ ;\ 1\ ;\ 3)$ et lui est perpendiculaire.

Exemple (Distance entre un point et une droite dans l'espace)

(11) Trouver la distance entre le point (3 ; -1 ; 7) et la droite passant par les deux points (2 ; 2 ; -1) et (0 ; 3 ; 5)

Solution



Soient A (2 ; 2 ; -1); B (0 ; 3 ; 5); C (3 ; -1 ; 7)

$\overrightarrow{BC} = \vec{C} - \vec{B} = (3\ ;\ -1\ ;\ 7) - (0\ ;\ 3\ ;\ 5) = (3\ ;\ -4\ ;\ 2)$

Le vecteur directeur de la droite $\vec{d} = \overrightarrow{BA} = \vec{A} - \vec{B}$

∴ $\vec{d} = (2\ ;\ -1\ ;\ -6)$

BD est la longueur de la projection de $\overrightarrow{BC}$ sur la droite $\overleftrightarrow{AB} = \frac{|\overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{BA}|}{\|\overrightarrow{BA}\|}$

∴ $BD = \frac{|(3، -4، 2) \bullet (2، -1، -6)|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-6)^2}} = \frac{3}{\sqrt{41}}$

Mais $\| \overrightarrow{BC} \| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 2^2} = \sqrt{29}$

$\therefore$ La distance CD $= \sqrt{(BC)^2 - (DB)^2}$

$= \sqrt{29 - \frac{4}{41}} = \sqrt{\frac{1185}{41}} \simeq 5{,}3$ unités de longueur

Essayez de résoudre:

11) Trouver la longueur de la perpendiculaire abaissée du point (2 ; 1 ; -4) sur la droite d'équation $\overrightarrow{r} = (1 ; -1 ; 2) + k\,(2 ; 3 ; -2)$

Réflexion critique : La distance entre un point B et la droite d' équation $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{A} + k\,\overrightarrow{B}$ est déterminée par la formule $= \dfrac{\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{d} \|}{\| \overrightarrow{d} \|}$ Pouvez-vous démontrer cette formule?

Exercices 2 - 1

Compléter:

1) L'équation vectorielle de la droite passant par le point (2 ; -1 ; 3) et ayant pour vecteur (-1 ; 4 ; 2) est ....

2) La mesure de l'angle entre les deux droites d'équations 2x = 3y = -z et 6x = -y = -4z est égale à .... °

3) La mesure de l'angle entre les deux droites ayant pour rapports directeurs (1 ; 1 ; 2) et $(\sqrt{3} - 1, -\sqrt{3} - 1, 4)$ est égale à ....

4) Si θ_z est la mesure de l'angle que fait la droite passant par le point (3, -1 ; 1) et le point d'origine avec le sens positif de l'axe des z , alors $\cos \theta_z =$ ....

5) Le vecteur directeur de la droite passant par les deux points (7 ; -5 ; 4) et (5 ; -3 ; 3) est ....

Compléter:

6) Trouver les cosinus des angles directeurs de la droite ayant pour rapports directeurs :

a) -1 ; 2 ; 3

b) 1 ; 1 ; 1

7) Trouver les différentes formes de l'équation de la droite :

a) passant par le point (4 ; -2 ; 5) et ayant pour vecteur directeur $\overrightarrow{d} = (2 ; 1 ; -1)$

b) passant par le point (3 ; -1 ; 5) et parallèle au vecteur $\overrightarrow{AB}$ où $\overrightarrow{AB} = (4 ; -2 ; 2)$

c) passant par les deux points (3 ; -2 ; 0) et (0 ; 4 ; 1)

d) passant par le point (3 ; 2 ; 5) et faisant avec les trois axes du repère des angles de même mesure.

8 Trouver la forme vectorielle de l'équation de la droite $x - 3 = \frac{y+2}{4} = \frac{2-z}{3}$

9 Si $\overrightarrow{OA} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$; $\overrightarrow{OB} = -\vec{i} - 3\vec{j}$;

$\overrightarrow{OC} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$; $\overrightarrow{OD} = 8\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$.

trouver l'équation vectorielle de chacune des droites suivantes:

a La droite passant par les deux points A et B

b La droite passant par le point D et parallèle à $\overleftrightarrow{BC}$

c La droite passant par le point C, coupant la droite $\overleftrightarrow{AB}$ et lui est perpendiculaire.

10 Trouver la mesure de l'angle entre les deux droites:

a L_1 : passant par les deux points (-3 ; 2 ; 4) et (2 ; 5 ; -2)
L_2 : passant par les deux points (1 ; -2 ; 2) et (4 ; 2 ; 3)

b $L_1 : \vec{r} = (2 ; -1 ; 3) + k_1 (-1 ; 4 ; 2)$
$L_2 : \vec{r} = (0 ; 2 ; -1) + k_2 (1 ; 1 ; 3)$

c $L_1 : 2x = 3y = 4z$
$L_2 : \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{-5}$

11 Citer la ou les conditions nécessaires pour que les deux droites:
L_1: $x = x_1 + a_1k_1$; $y = y_1 + b_1k_1$; $z = z_1 + c_1k_1$
L_2 : $x = x_2 + a_2k_2$; $y = y_2 + b_2k_2$; $z = z_2 + c_2k_2$

a soient parallèles

b soient perpendiculaires

c soient sécantes en un seul point

12 Trouver l'équation de la droite passant par le point A(1 ; –1 ; 0) et parallèle à la droite passant par les deux points B(–3 ; 2 ; 1) et C(2 , 1 , 0) puis démontrer que le point (–4 , 2 ; 3) appartient à cette droite.

13 Trouver la valeur de n pour que les deux droites $L_1 : \vec{r_1} = (3 ; -1 ; n) + k_1 (4 ; 1, 3)$ et $L_2 : x = \frac{y-4}{-1} = \frac{z+1}{2}$ soient sécantes en un seul point puis trouver ce point

14 **Déceler l'erreur :**

a Pour une droite quelconque, la somme des carrés des rapports directeurs est égale à 1.

b Les cosinus des angles directeurs de la droite passant par les deux points $(x_1 ; y_1 ; z_1)$ et $(x_2 ; y_2 ; z_2)$ sont $(x_2 - x_1 ; y_2 - y_1 ; z_2 - z_1)$

c Si (A_1, B_1, C_1) et (A_2, B_2, C_2) sont les rapports directeurs respectifs des deux droites L_1 et L_2 ; alors la mesure de l'angle entre les deux droites est donnée par la relation $\cos\theta = |a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|$

Unité (2)

2 - 2 Équation d'un plan dans l'espace

À apprendre

- Équation vectorielle d'un plan dans l'espace.
- Équation standard d'un plan dans l'espace.
- Équation générale d'un plan dans l'espace.
- Angle entre deux vecteurs.
- Condition de parallélisme de deux plans.
- Condition de perpendicularité de deux plans.
- Équation de la droite d'intersection de deux plans dans l'espace.
- Distance entre un point et un plan.
- Distance entre deux plans parallèles.

Expressions de base

- Plan
- Forme standard
- Deux plans parallèles
- Deux plans perpendiculaires
- Deux plans sécants
- Angle

Matériel utilisé

- Calculatrice scientifique
- Logiciels de graphisme à trois dimensions

Réfléchir et discuter

1- Si $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont deux vecteurs perpendiculaires, alors $\vec{A} \cdot \vec{B}$ = ...

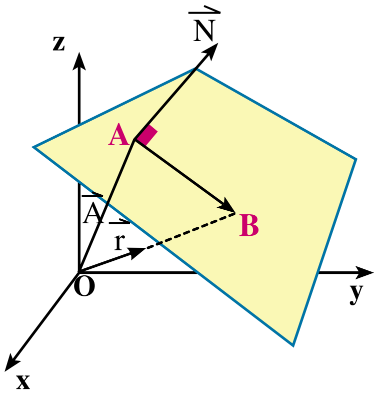
2- Un vecteur directeur de la droite passant par les deux points (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) est ....

3- La coordonnée z de tous les points appartenant au plan du cartésien XY est égale à ....

À apprendre

Forme vectorielle de l'équation d'un plan dans l'espace

Soient A (x_1, y_1, z_1) un point d'un plan qui a pour vecteur de position $\vec{A}$; $\vec{N} = (a;\ b;\ c)$ un vecteur directeur orthogonal au plan et et B (x, y, z) un point quelconque du plan qui a pour vecteur de position $\vec{r}$ Alors:



$$\vec{N} \cdot \vec{AB} = 0$$

$$\therefore \quad \vec{N} \cdot (\vec{B} - \vec{A}) = 0 \qquad (\vec{B} = \vec{r})$$

$$\therefore \quad \vec{N} \cdot \vec{r} = \vec{N} \cdot \vec{A}$$ ⟶ **C'est la forme vectorielle de l'équation d'un plan**

C'est à dire : Pour trouver l'équation vectorielle d'un plan, il faut connaitre un point du plan et un vecteur directeur orthogonal au plan.

Exemple

1 Trouver la forme vectorielle de l'équation du plan passant par le point (0 ; 1, 1) et ayant pour vecteur directeur orthogonal au plan le vecteur $\vec{N} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

Solution

L'équation vectorielle est $\overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{r} = \overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{A}$ où $\overrightarrow{A} = (0 ; 1 ; 1)$

$\therefore \quad (1 ; 1 ; 1) \cdot \overrightarrow{r} = (1 ; 1 ; 1) \cdot (0 ; 1 ; 1)$

$(1 ; 1 ; 1) \cdot \overrightarrow{r} = 2$

Essayez de résoudre

1. Trouver la forme vectorielle de l'équation du plan passant par le point (2 ; –3 ; 1) et ayant pour vecteur directeur orthogonal au plan le vecteur $\overrightarrow{N} = (1 ; -2 ; 3)$.

À apprendre

Forme standard de l'équation d'un plan dans l'espace

D'après la forme vectorielle de l'équation du plan

$$\overrightarrow{N} \cdot (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{A}) = 0$$

où $\overrightarrow{N} = (a ; b ; c)$ et $\overrightarrow{r} = (x ; y ; z)$; $\overrightarrow{A} = (x_1 ; y_1 ; z_1)$

$\therefore \quad (a ; b ; c) \cdot (x - x_1 ; y - y_1 ; z - z_1) = 0$

$\therefore \quad a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0 \longrightarrow$ **est la forme standard de l'équation d'un plan**

En développant:

$\therefore \quad ax + by + cz + (-ax_1 - by_1 - cz_1) = 0$

En posant $-ax_1 - by_1 - cz_1 = d$; **on obtient**

$ax + by + cz + d = 0 \longrightarrow$ **est la forme générale de l'équation d'un plan**

Exemple

2. Trouver la forme standard et la forme générale de l'équation du plan passant par le point (3 ; -5 ; 2) et ayant pour vecteur directeur orthogonal au plan le vecteur $\overrightarrow{N} = (2 ; 1, 1)$.

Solution

La forme standard est $a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$

$\therefore \quad 2(x - 3) + (y + 5) + (z - 2) = 0 \longrightarrow$ **Forme standard**

En développant et simplifiant:

$\therefore \quad 2x + y + z - 3 = 0 \longrightarrow$ **Forme générale**

Essayez de résoudre

2. Trouver les différentes formes de l'équation du plan passant par le point (-3 ; 4 ; 2) et ayant pour vecteur directeur orthogonal au plan le vecteur $\overrightarrow{N} = (1 ; -1 ; 3)$.

Exemple **(Équation d'un plan passant par trois points non alignés)**

3. Trouver les différentes formes de l'équation du plan passant par les points (3 ; -1, 0) ; (2 ; 1 ; 4) et (0 ; 3 ; 3).

Solution

Il faut d'abord s'assurer que les trois points ne sont pas alignés

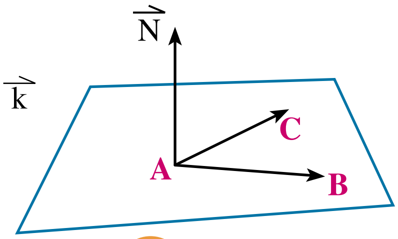
Soient A (3 ; -1 ; 0) , B (2 ; 1 ; 4) , C (0 ; 3 ; 3)

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = (-1, 2, 4)$; $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{A} = (-3 ; 4 ; 3)$

$\because \frac{-1}{-3} \neq \frac{1}{2}$ $\therefore \overrightarrow{AB} \nparallel \overrightarrow{AC}$ $\therefore$ les trois points ne sont pas alignés

Pour trouver l'équation du plan, nous avons besoin d'un vecteur directeur orthogonal au plan. On peut obtenir ce vecteur à l'aide du produit vectoriel des deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{N} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -10\,\overrightarrow{i} - 9\,\overrightarrow{j} + 2\,\overrightarrow{k}$$



$\therefore$ **La forme vectorielle de l'équation du plan est**

$\overrightarrow{n} \bullet \overrightarrow{r} = \overrightarrow{n} \bullet \overrightarrow{A}$

$\therefore$ $(-10 ; -9 ; 2) \bullet \overrightarrow{r} = (-10 ; -9 ; 2) \bullet (3 ; -1, 0)$

$\therefore$ $(-10 ; -9 ; 2) \bullet \overrightarrow{r} = -21$

Forme standard de l'équation du plan

$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$

$\therefore$ $-10(x - 3) - 9(y + 1) + 2z = 0$

Forme générale de l'équation du plan

$(-10 ; -9 ; 2) \bullet (x ; y, z) = -21$

$\therefore$ $-10x - 9y + 2z + 21 = 0$

Pour votre information

L'équation d'u plan passant par les trois points (x_1, y_1, z_1); (x_2, y_2, z_2); (x_3, y_3, z_3) est :

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Essayez de résoudre

3 Trouver les différentes formes de l'équation du plan passant par les points (1 ; 0 ; 0), (0 ; 2 ; 0) et (0 ; 0 ; 3).

Exemple **(Plan contenant deux droites)**

4 Démontrer que les deux droites $\overrightarrow{r_1} = (3\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}) + k_1(\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k})$

et $\overrightarrow{r_2} = (2\overrightarrow{i} + 5\overrightarrow{j}) + k_2(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})$

sont sécantes puis trouver l'équation du plan qui les contient.

Solution

Si $\overrightarrow{r_1} = \overrightarrow{r_2}$ alors les deux droites se coupent

$\therefore$ $(3\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}) + k_1(\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}) = (2\overrightarrow{i} + 5\overrightarrow{j}) + k_2(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})$

En égalisant les coefficients:

$3 + k_1 = 2 + k_2$ d'où $k_1 - k_2 = -1$ **(1)**

$1 + 2k_1 = 5 - k_2$ d'où $2k_1 + k_2 = 4$ **(2)**

$-1 + 3k_1 = k_2$ d'où $3k_1 - k_2 = 1$ **(3)**

En résolvant les équations (1) et (2) on a $k_1 = 1$; $k_2 = 2$

Ces valeurs vérifient l'équation

$\therefore$ les deux droites sont sécantes.

Un vecteur directeur orthogonal au plan est $\overrightarrow{N}$ tel que:

$$\overrightarrow{N} = \overrightarrow{d_1} \times \overrightarrow{d_2} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 5\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k}$$

L'équation vectorielle du plan est $\overrightarrow{N} \bullet \overrightarrow{r} = \overrightarrow{N} \bullet \overrightarrow{A}$

$\therefore (5 ; 2 ; -3) \bullet \overrightarrow{r} = (5 ; 2 ; -3) \bullet (3 ; 1 ; -1)$

$\therefore (5 ; 2 ; -3) \bullet \overrightarrow{r} = 20$

La forme générale:

$(5 ; 2 ; -3) \bullet (x ; y ; z) = 20$

$\therefore 5x + 2y - 3z = 20$

Essayez de résoudre:

4 Démontrer que les deux droites $L_1 : 2x = 3y = 4z$ et $L_2 : 3x = 2y = 5z$ sont sécantes puis trouver l'équation du plan qui les contient.

Exemple

5 Trouver le point d'intersection de la droite $2x = 3y - 1 = z - 4$ avec le plan $3x + y - 2z = 5$

Solution

De l'équation du plan

$$y = 5 + 2z - 3x$$

En substituant dans l'équation de la droite:

$$2x = 14 + 6z - 9y$$
$$= z - 4$$

$11x - 6z = 14$ **(1)**

et $-5z + 9x = 18$ **(2)**

En résolvant les deux équations (1) et (2), on obtient:

$$x = -38 ; z = -72$$

En substituant dans l'équation du plan:

$$\therefore y = -25$$

$\therefore$ le point d'intersection est $(-38 ; -25 ; -72)$

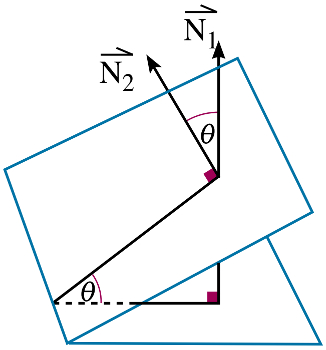
Essayez de résoudre

5 Trouver le point d'intersection de la droite $\vec{r} = (1 ; 4 ; 2) + t\,(3 ; 2, 2)$ avec le plan $(3 ; 2, 2) \cdot \vec{r} = -2$

À apprendre

Angle entre deux plans

La mesure de l'angle entre deux plans est la mesure de l'angle entre les deux vecteurs directeurs orthogonaux aux deux plans. si $\vec{N_1}$ et $\vec{N_2}$ sont deux vecteurs directeurs orthogonaux aux deux plans, alors la mesure de l'angle entre deux plans est donnée par la relation :



$$\cos\theta = \frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{\|\vec{n_1}\|\,\|\vec{n_2}\|} \quad \text{où } 0 \leqslant \theta \leqslant 90^\circ$$

Exemple

6 Trouver la mesure de l'angle entre deux plans $(2 ; -1, 4) \cdot \vec{r} = 5$ et $3x - y + 2z = 4$

Solution

Un vecteur directeur de la première droite est $\vec{N_1} = (2 ; -1 ; 4)$

Un vecteur directeur de la deuxième droite est $\vec{N_2} = (3 ; -1 ; 2)$

$\therefore$ La mesure de l'angle entre les deux vecteurs est θ où

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{\|\vec{n_1}\|\,\|\vec{n_2}\|} = \frac{|(2 ; -1 ; 4) \cdot (3 ; -1 ; 2)|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 4^2}\ \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{15}{7\sqrt{6}}$$

$$\therefore \quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{15}{7\sqrt{6}}\right) = 28^\circ 58'$$

Essayez de résoudre:

6 Trouver la mesure de l'angle entre deux plans $x - 3y + 2z = 0$ et $2x + y - z = 3$

Plans parallèles et plans perpendiculaires

Si $\vec{N_1}$ et $\vec{N_2}$ sont deux vecteurs directeurs orthogonaux à deux plans, alors

1- les deux plans sont parallèles si $\vec{N_1} \,//\, \vec{N_2}$ c'est à dire si $\left(\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}\right)$

2- les deux plans sont perpendiculaires si $\vec{N_1} \cdot \vec{N_2} = 0$ c'est à dire si $(a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2) = 0$

Exemple

7 Si le plan $2x - y + Kz = 5$ est parallèle au plan $x + Ly + 4z = 1$, trouver la valeur de K ; L.

Solution

$\because$ Les deux plans sont parallèles $\quad \therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

$\therefore \quad \frac{2}{1} = \frac{-1}{L} = \frac{K}{4}$ $\qquad\qquad$ $\therefore\ L = \frac{-1}{2}$ et $K = 8$

Essayez de résoudre

7) Si le plan $x - 2y + z = 4$ est perpendiculaire au plan $a\,x + 2y + 3z = 5$, trouver la valeur de a

Exemple **(Équation de la droite d'intersection de deux plans)**

8) Trouver l'équation de la droite d'intersection des deux plans $x + 2y - 2z = 1$ et $2x + y - 3z = 5$

Solution

Par élimination de x dans les deux équations, en multipliant la première équation par –2 puis en l'additionnant à la seconde :

$\therefore \quad -3y + z = 3$ d'où $z = 3y + 3$ **(1)**

Par élimination de y dans les deux équations, en multipliant la deuxième équation par –2 puis en additionnant:

$\therefore \quad -3x + 4z = -9$ d'où $z = \dfrac{3x - 9}{4}$

$\therefore \quad \boxed{\dfrac{3x-9}{4} = \dfrac{3y+3}{1} = \dfrac{z}{1}}$ **est l'équation de la droite d'intersection des deux plans**

Autre solution:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & 2z & = 1 & (1) \\ 2x & + & y & - & 3z & = 5 & (2) \\ \hline -3x & + & z & & & = 3 & (3) \end{array}$$

En éliminant x

Soit $z = k$

De (3) $y = \dfrac{k - 3}{3}$; **De (2)** $x = \dfrac{9 + 4k}{3}$

$\therefore$ **Les équations paramétriques de la droite d'intersection des deux plans sont;**

$x = 3 + \frac{4}{3}k \quad , \quad y = -1 + \frac{1}{3}k \quad$ et $\quad z = k$

Autre solution

Les vecteurs directeurs orthogonaux aux deux plans $\overrightarrow{N_1}$ et $\overrightarrow{N_2}$ sont perpendiculaires à la droite d'intersection des deux plans.

$\therefore$ Le vecteur directeur $\overrightarrow{d}$ de la droite d'intersection peut être calculé en utilisant le produit vectoriel des deux vecteurs $\overrightarrow{N_1}$ et $\overrightarrow{N_2}$

$$\overrightarrow{d} = \overrightarrow{N_1} \bullet \overrightarrow{N_2} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -4\,\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} - 3\,\overrightarrow{k}$$

Pour trouver un point de la droite d'intersection, on pose $x = 1$ **(par exemple)**

En substituant dans l'équation du premier plan $2y - 2z = 0$ **(1)**

En substituant dans l'équation du deuxième plan $y - 3z = 3$ **(2)**

Des deux équations (1) et (2), on obtient $z = -\frac{3}{2}$ et $y = -\frac{3}{2}$

$\therefore$ Le point $(1\ ;-\frac{3}{2}\ ;-\frac{3}{2})$ est situé sur la droite d'intersection .

L'équation de la droite d'intersection est $\overrightarrow{r} = (1\ ;-\frac{3}{2}\ ;-\frac{3}{2}) + t\,(-4\ ;-1\ ;-3)$

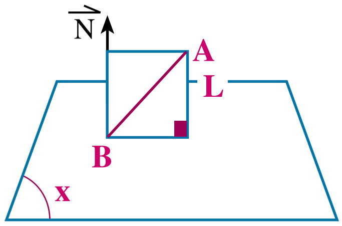
Essayez de résoudre

8 Trouver l'équation de la droite d'intersection des deux plans $3x - y + 2z = 3$ et $x - 2y + 5z = 2$

À apprendre

Longueur de la perpendiculaire abaissée d'un point sur un plan

Soient $A(x_1\ ;y_1\ ;z_1)$ un point n'appartenant pas à un plan X et B un point du plan. Si $\overrightarrow{N}$ est un vecteur directeur orthogonal au plan, alors la distance du point A au plan est égale à la longueur de la projection de $\overrightarrow{BA}$ sur $\overrightarrow{N}$



$$L = \frac{|\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{n}|}{\|\overrightarrow{n}\|}$$

Exemple

9 Trouver la longueur de la perpendiculaire abaissée du point (1 ; -1 ; 3) sur le plan d'équation $\overrightarrow{r} \cdot (2\ ;2\ ;-1) = 5$

Solution

Il faut trouver un point du plan et un vecteur directeur orthogonal au plan. À partir de l'équation du plan $\overrightarrow{r} . (2\ ;2\ ;-1) = 5$

on trouve que $\overrightarrow{N} = (2\ ;2\ ;-1)$

Pour trouver un point du plan, on suppose que le plan coupe l'axe des z au point (0 ; 0 ; z)

$\therefore$ $(0\ ;0\ ;z) \cdot (2\ ;2\ ;-1) = 5$; **d'où** $z = -5$

$\therefore$ Le point B (0 ; 0 ; -5) appartient au plan.

$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{A} - \overrightarrow{B} = (1\ ;-1\ ;8)$ où A (1 ; -1 ; 3)

La longueur de la perpendiculaire $L = \frac{|\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{n}|}{\|\overrightarrow{n}\|} = \frac{|(1, -1, 8) \cdot (2, 2\ ;-1)|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{8}{3}$ unités de longueur

Essayez de résoudre

9 Trouver la longueur de la perpendiculaire abaissée du point (-2 ; 1 ; 4) sur le plan d'équation $\overrightarrow{r} . (1\ ;\ -3\ ;\ 2) = 4$

Forme cartésienne de la longueur de la perpendiculaire abaissée d'un point sur un plan

On sait que la longueur de la perpendiculaire abaissée du point $A(x_1\ ;y_1\ ;z_1)$ sur le plan passant par le point $B(x_2\ ;y_2\ ;z_2)$ et ayant $\overrightarrow{N} = (a\ ;\ b\ ;\ c)$ pour vecteur directeur orthogonal au plan est donnée par la relation :

$$L = \frac{|\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{n}|}{\|\overrightarrow{n}\|}$$

$$\therefore \quad L = \frac{|(x_1 - x_2 ; y_1 - y_2 ; z_1 - z_2) \cdot (a ; b ; c)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$= \frac{|ax_1 + b y_1 + c z_1 + (-a x_2 - b y_2 - cz_2)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$\because$ Le point B $(x_2 ; y_2 ; z_2)$ est situé au plan $a x + by + cz + d = 0$

$\therefore \quad L = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ **est la forme cartésienne de la longueur de la perpendiculaire**

Exemple

(10) Trouver la longueur de la perpendiculaire abaissée du point (1 ; 5, -4) sur le plan d'équation $3x - y + 2z = 6$

Solution

$$L = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$= \frac{|3(1) - (5) + 2(-4) - 6|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{16}{\sqrt{14}} \text{ unités de longueur}$$

Essayez de résoudre

(10) Trouver la longueur de la perpendiculaire abaissée du point (–1 ; 4 ; 0) sur le plan d'équation $x - 2y - z = 4$

Exemple **(Distance entre deux plans parallèles)**

(11) Démontrer que les deux plans $x + 3y - 4z = 3$ et $2x + 6y - 8z = 4$ sont parallèles puis trouver la distance entre eux.

Solution

Pour démontrer que les deux plans sont parallèles, on démontre que les vecteurs directeurs orthogonaux à ces deux plans sont parallèles.

$\overrightarrow{N_1} = (1 ; 3 ; -4)$; $\overrightarrow{N_2} = (2 ; 6 ; -8)$

$\because \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{2} \qquad \frac{b_1}{b_2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} ; \qquad \frac{c_1}{c_2} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}$

$\therefore \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ $\qquad \therefore$ Les deux plans sont parallèles

Pour trouver la distance entre les deux plans, on cherche un point appartenant à l'un d'eux puis on calcule la distance du point trouvé par rapport à l'autre plan.

Pour chercher un point appartenant au premier plan, on pose $x = 0$ et $y = 0$ dans l'équation du premier plan.

$\therefore z = \frac{-3}{4}$ Dans ce cas, la longueur de la perpendiculaire de ce point sur le deuxième plan est

$$L = \frac{|2(0) + 6(0) - 8(\frac{-3}{4}) - 4|}{\sqrt{2^2 + 6^2 + (-8)^2}} = \frac{\sqrt{14}}{26} \text{ unités de longueur}$$

Essayez de résoudre

(11) Démontrer que les deux plans $3x + 6y + 6z = 4$ et $x + 2y + 2z = 1$ sont parallèles puis trouver la distance entre eux.

À apprendre

Équation d'un plan en fonction des parties coupées des trois axes du repère

Si un plan coupe les trois axes du repère aux points n $(x_1 ; 0 ; 0)$, $(0 ; y_1 ; 0)$ et $(0 ; 0 ; z_1)$, alors l'équation du plan est sous la forme:

$$\frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} + \frac{z}{z_1} = 1 \longrightarrow$$ **Équation du plan en fonction des parties coupées des trois axes du repère :**

Exemple

(12) Trouver l'équation du plan qui coupe des axes x , y et z du repère les parties 2 , –3 et 5 respectivement.

Solution

L'équation du plan est $\frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} + \frac{z}{z_1} = 1$

D'où $\frac{x}{2} + \frac{y}{-3} + \frac{z}{5} = 1$

Essayez de résoudre

(12) Trouver les parties coupées des trois axes du repère par le plan d'équation $2x + 3y - z = 6$

Réflexion critique :

Si le plan d'équation $3x + 2y + 4z = 12$ coupe les trois axes du repère x ; y ; z au points A , B et C respectivement, calculer l'aire du triangle ABC.

Exercices 2 - 2

Choisir la bonne réponse parmi les réponses proposées:

(1) Parmi les points suivants, celui qui appartient au plan $2x + 3y - z = 4$ est

a (1 ; 1 ; 1) b (1 ; 2 ; 0) c (0 ; 2 ; 1) d (3 ; 2 ; -1)

(2) L'abscisse du point d'intersection du plan $3x - 2y + 4z + 12$ avec l'axe des abscisses est

a 3 b -4 c 4 d 6

(3) Si a , b et c sont les parties coupées des trois axes du repère par le plan $x + 5y – 6z = 30$, alors a + b + c =

a 0 b 30 c 31 d 41

(4) L'équation du plan passant par le point (1 ; 2 ; 3) et parallèle à l'axe des x et l'axe des y est

a $x + y = 3$ b $z = 3$ c $x = 1$ d $y = 2$

(5) L'équation du plan passant par les points (2 ; 3 ; 5) ; (–1 ; 3 ; 1) et (4 ; 3 –2) est

a $x + y - z = 0$ b $x = -1$ c $y = 3$ d $z = -2$

6) L'équation du plan passant par le point (1 ; –2 ; 5) et ayant pour vecteur directeur orthogonal au plan le vecteur (2 ; 1 ; 3) est

a) $2x + y + 3z = 1$ b) $2x + y + 3z = 15$
c) $x - 2y + 5z = 15$ d) $x + y + z = 4$

Répondre aux questions suivantes:

7) Trouver les différentes formes de l'équation du plan passant par le point (1 ; –1 ; 4) et ayant pour vecteur directeur orthogonal au plan le vecteur $\overrightarrow{N} = (2 ;\ -3 ;\ 4)$ puis répondre aux questions suivantes :

a) Le point (2 ; 2 ; 1) appartient-il au plan ?
b) Le vecteur $\overrightarrow{e} = (3 ; -5 ; -2)$ est-il parallèle au plan ?

8) Trouver trois points dans l'espace appartenant à chacun des plans suivants:

a) $x = 3$ b) $y = -2$ c) $x + 3y = 5$ d) $2x - y + 3z = 4$

9) Trouver l'équation générale du plan passant par le point d'origine et ayant pour vecteur directeur orthogonal au plan le vecteur
$\overrightarrow{N} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k}$

10) Trouver les différentes formes de l'équation du plan passant par le point (2 ; –1 ; 0) et ayant pour vecteur directeur orthogonal au plan le vecteur $\overrightarrow{N} = 4\overrightarrow{i} + 10\overrightarrow{j} - 7\overrightarrow{k}$

11) Trouver les différentes formes de l'équation du plan passant par les points (2 ; -1 ; 0) , (-1 ; 3 ; 4) et (3 ; 0 ; 2)

12) Démontrer que la droite $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{k} + k\,(2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k})$ est perpendiculaire au plan $x + \frac{3}{2}y + 2z = 5$

13) Démontrer que le point A(2 ; 3 ; 1) et la droite L : $\overrightarrow{r} = (3\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}) + k(\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k})$ sont situés dans le plan d'équation $\overrightarrow{r} \bullet (2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{k}) = 3$

14) Dans chaque cas, trouver l'équation du plan passant par le point (2 ; 1 ; 4) et vérifiant l'une des conditions suivantes :

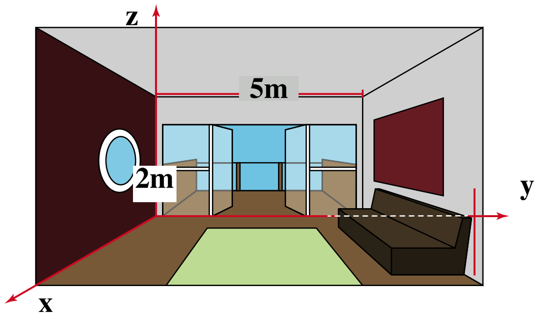
a) Parallèle au plan $2x + 3y + 5z = 1$
b) Perpendiculaire à la droite passant par les deux points (3 ; 2 ; 5) ; (1 ; 6 ; 4)
c) Perpendiculaire à chacun des deux plans $7x + y + 2z = 6$ et $3x + 5y - 6z = 8$

15) Trouver les coordonnées du point d'intersection de la droite
$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{k} + k\,(2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})$ avec le plan $\overrightarrow{r} \bullet \overrightarrow{i} = 4$

16) Trouver les différentes formes de l'équation du plan coupant des trois axes du repère x , y et z les parties 2 ; 4 et 5 respectivement

17 **Lien avec l'environnement:** Dans la figure ci-contre, trouver l'équation :

- **a** du plan du sol de la chambre
- **b** du plan du plafond de la chambre
- **c** des plans des murs latéraux



18 Trouver l'équation du plan contenant la droite

L_1: $\vec{r} = (0 ; 3 ; -5) + t_1 (6 ; -2 ; -1)$ et parallèle à la droite

L_2 : $\vec{r} = (1 ; 7 ; -4) + t_2 (1 ; -3 ; 3)$

19 Trouver la mesure de l'angle entre les deux plans dans chacun des cas suivants:

- **a** $L_1 : 2x - y + z = 5$; $L_2: 3x + 2y - 2z = 1$
- **b** $L_1: \vec{r} \bullet (2 ; 1 ; -1) = 4$; $L_2: \vec{r} \bullet (3 ; -2 ; 0) = 7$
- **c** $L_1 : y = 4$; $L_2: x - 3y + 5z = 1$

Questions à plusieurs conclusions:

20 Soient A, B, C er D quatre points du plan ayant pour vecteurs de position respectifs par rapport au point d'origine O les vecteurs $-\vec{j} + \vec{k}$; $2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $-\vec{x} - 2\vec{y} + 2\vec{z}$, $7\vec{x} - 4\vec{y} + 2\vec{z}$

- **a** Trouver un vecteur directeur orthogonal au plan ABC
- **b** Démontrer que la longueur de la perpendiculaire abaissée du point D sur le plan ABC est égale à $2\sqrt{6}$
- **c** Démontrer que les deux plans ABC et DBC sont perpendiculaires.
- **d** Trouver l'équation de la droite d'intersection des deux plans ABC et ODB

21 Soient X un plan contenant les points A(1 ; 4 ; 2) , B(1 ; 0 ; 5) et C(0 ; 8 ; –1) et Y plan contenant le point (2 ; 2 ; 3) et ayant pour vecteur directeur le vecteur $\vec{N} = \vec{j} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$

- **a** Trouver l'équation cartésienne du Plan X
- **b** Trouver l'équation cartésienne du Plan Y
- **c** Si le point (p ; 0 ; f) appartient aux deux plans X et Y, trouver la valeur de p et f.
- **d** Trouver l'équation vectorielle de la droite d'intersection des deux plans X et Y
- **e** Si le point (1 ; 1 ; k) est à égales distances des deux plans X et Y , trouver les valeurs possibles de k

Résumé de l'unité

Vecteur de position :

1. Si L , M et N sont les cosinus des angles directeurs d'une droite, alors le vecteur $\overrightarrow{d}$ = k(L ; M ; N) représente le vecteur directeur de la droite et on le note $\overrightarrow{d}$ = k(a ; b ; c). Les nombres (a ; b ; c) sont les rapports directeurs de la droite.

2. Un vecteur directeur d'une droite peut prendre plusieurs formes comme
$\overrightarrow{d}$ = 2(L ; M ; N) = 3(L ; M ; N) = –4(L ; M ; N) ....

Equation de la droite

- L'équation de la droite passant par le point (x_1, y_1, z_1) et ayant pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{d}$ = (a, b, c)(a ; b ; c) est de la forme : $\overrightarrow{r} = (x_1 ; y_1 ; z_1) + k(a ; b ; c)$
- **L'équation paramétrique de la droite est :** $x = x_1 + k\,a$; $y = y_1 + k\,b$, $z = z_1 + k\,c$
- **L'équation cartésienne de la droite est :** $\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$

Angle entre deux droites:

Si $\overrightarrow{d_1}$ et $\overrightarrow{d_2}$ sont deux vecteurs directeurs de deux droites, alors la mesure du plus petit angle entre les deux droites est:

$$\cos\theta = \frac{|\overrightarrow{d_1} \cdot \overrightarrow{d_2}|}{\|\overrightarrow{d_1}\|\,\|\overrightarrow{d_2}\|}$$

Si $(L_1 ; M_1 ; N_1)$ et $(L_2 ; M_2 ; N_2)$ sont les cosinus des angles directeurs des deux droites, alors :

$$\cos\theta = |L_1, L_2 + M_1 M_2 + N_1 N_2|$$

Conditions de parallélisme et de perpendicularité de deux droites

Si $\overrightarrow{d_1} = (a_1; b_1; c_1)$ et $\overrightarrow{d_2} = (a_2; b_2; c_2)$ sont les vecteurs directeurs de deux droites, alors:

- **les deux droites sont parallèles si:**

$$\overrightarrow{d_1} = k\,\overrightarrow{d_2} \quad ; \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{d_1} \times \overrightarrow{d_2} = \overrightarrow{o} \quad ; \quad \text{ou} \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

- **les deux droites sont perpendiculaires si :**

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$$

Equation d'un plan:

L'équation du plan passant par le point $(x_1; y_1; z_1)$ et ayant pour vecteur directeur orthogonal au plan le vecteur $\overrightarrow{N} = (a; b; c)$ est .

- **Forme vectorielle :** $\overrightarrow{N} \bullet \overrightarrow{r} = \overrightarrow{N} \bullet (x_1, y_1, z_1)$
- **Forme standard :** $a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$
- **Forme générale :** $ax + by + cz + d = 0$

Angle entre deux plans

- Si $\overrightarrow{N_1} = (a_1; b_1; c_1)$ et $\overrightarrow{N_2} = (a_2; b_2; c_2)$ sont deux vecteurs directeurs orthogonaux à deux plans, alors la mesure de l'angle entre les deux plans est donnée par la relation

$$\cos\theta = \frac{|\overrightarrow{n_1} \bullet \overrightarrow{n_2}|}{\|\overrightarrow{n_1}\| \, \|\overrightarrow{n_2}\|} \qquad \text{où } 0 \leqslant \theta \leqslant 90^\circ$$

Deux plans parallèles et deux plans perpendiculaires:

- Si $\overrightarrow{N_1}$ et $\overrightarrow{N_2}$ sont deux vecteurs directeurs orthogonaux à deux plans, alors la condition du parallélisme des deux plans est:

$$\overrightarrow{N_1} \,//\, \overrightarrow{N_2} \quad \text{ou} \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

- La condition de perpendicularité des deux plans est:

$$\overrightarrow{N_1} \cdot \overrightarrow{N_2} = 0 \quad \text{ou} \quad a_1 \, a_2 + b_1 \, b_2 + c_1 \, c_2 = 0$$

Longueur de la perpendiculaire abaissée d'un point sur un plan:

- La longueur de la perpendiculaire abaissée du point $A(x_1 ; y_1 ; z_1)$ sur le plan passant par le point $B(x_2 ; y_2 ; z_2)$ et ayant pour vecteur directeur orthogonal au plan le vecteur $\overrightarrow{N} = (a; b; c)$ est:

$$L = \frac{|\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{N}|}{\|\overrightarrow{n}\|} \qquad \text{Forme vectorielle}$$

ou

$$L = \frac{|ax_1 + b\,y_1 + c\,z_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \qquad \text{Forme vectorielle}$$

Exercices généraux

Choisir la bonne réponse parmi les réponses proposées:

1. L'équation de la droite passant par le point (–1 ; 0 ; 2) et ayant pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{d} = (1; -1; 3)$ est

   a) $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$ b) $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{3}$

   c) $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$ d) $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$

2. L'équation de la droite passant par les deux points A(1; -1; 2) et B (-1; 0; 1) est

   a) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{1}$ b) $\frac{x+1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$

   c) $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{2}$ d) $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{1}$

3. La mesure de l'angle entre les deux droites $\frac{x-3}{2} = \frac{z+1}{-2}$; $y = 1$ et $\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-2}$ est égale à

   a) 15° b) 30° c) 45° d) 60°

4. Si les deux droites L_1: $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{m}$ et L_2 : $\frac{x-1}{m} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$ sont perpendiculaires, alors la valeur de m est égale à

   a) -1 b) 2 c) 1 d) -3

5. Si les deux droites L_1: $x = 2k - 1$, $y = k + 1$, $z = k - 1$ et L_2: $x = ak - 1$, $y = 2k + 1$, $z = bk - 2$ sont parallèles, alors a + b =

   a) 4 b) -2 c) 6 d) -2

6. Le point (2 ; –1 ; 3) appartient au plan

   a) $x + y - z = 6$ b) $2x - 3y + z = -10$ c) $3x - 2y + 4z = 20$ d) $x - 2y + 5z = 4$

7. Si le plan $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 1$ coupe les trois axes du repère aux points A , B et C , alors l'aire du triangle ABC =

   a) 12 b) 10 c) 6 d) 4

8. La longueur de la perpendiculaire abaissée du point (2 ; 3 ; 1) au plan $2x - 2y + z = 5$ est

   a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

9. L'équation de la droite d'intersection des deux plans L_1: $2x - y + z - 1 = 0$ et L_2: $x - 3y - z + 2 = 0$ est

   a) $\frac{x+1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ b) $\frac{x-1}{1} = -\frac{y}{3} = \frac{z-5}{1}$

c $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{-1}$

d $\frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{-5}$

10 Les deux droites L_1: $\frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{3}$ et L_2: $\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{-1}$ sont situées dans le plan

a $3x - 5y + z - 1 = 0$

b $5x - 4y + 2z - 7 = 0$

c $7x - 5y - z - 4 = 0$

d $7x + 2y + 3z = 0$

Répondre aux questions suivantes:

11 Trouver la distance entre le point (-2; 4; -5) et la droite $\frac{x+3}{3} = \frac{y-4}{5} = \frac{z+8}{6}$

12 Trouver la distance entre le point (2; 1; -1) et le plan $\vec{r} \bullet (\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}) = 9$

13 Trouver les coordonnées du point d'intersection de la droite passant par les deux points (3; -4; -5) et (2; -3; 1) avec le plan passant par les points (2; 2; 1) , (3; 0; 1) , (4; -1; 0)

14 Trouver les coordonnées du point d'intersection de la droite $\vec{r} = (2, -1, 2) + t\,(3, 4, 2)$ avec le plan $\vec{r} \bullet (1; -1; 1) = 5$

15 Trouver la projection du point A(0, 9, 6) sur la droite passant par les deux points (1, 2, 3) et (7, -2, 5)

16 Démontrer que les deux plans $2x + y + 2z = 8$ et $4x + 2y + 4z + 5 = 0$ sont parallèles puis calculer la distance entre eux.

Réflexion créative

17 Si un plan coupe les trois axes du repère aux points A ; B et C et si le point (p ; q ; r) est le point d'intersection des médianes du triangle ABC, démontrer que l'équation du plan est $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 3$

Épreuve cumulative

Compléter ce qui suit:

1 La mesure de l'angle que fait la droite $\frac{x-1}{\sqrt{2}} = \frac{y-\sqrt{2}}{1} = \frac{z+1}{1}$ avec le sens positif de l'axe des z est égale à ....

2 La longueur de la perpendiculaire abaissée du point (-1, 0 ; 1) sur la droite $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1}$ est égale à ....

3 Les équations paramétriques de la droite passant par les deux points A(-1, 0, 3) et B(1, -1, 0) sont ....

4 La mesure de l'angle entre les deux plans $-x - y + \sqrt{2}\,z + 1 = 0$ et $x - y + \sqrt{2}\,z - 3 = 0$ est égale à ....

5 L'équation du plan passant par le point (2 ; 3 ; –1) et ayant pour vecteur directeur orthogonal le vecteur $\overrightarrow{N}$ = (5, 2, -3) est ....

6 Le plan 3x - 4y + z + 10 = 0 coupe de l'axe des y une partie de longueur ....

7 Le point d'intersection de la droite $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{3}$ et the plane x - 2y + 3z + 5 = 0 est ....

Choisir la bonne réponse parmi les réponses proposées:

8 La distance entre le point (a ; b ; c) et l'axe des x est égale à

a) $\sqrt{a^2 + c^2}$ b) $\sqrt{a^2 + b^2}$ c) $\sqrt{b^2 + c^2}$ d) $\sqrt{b^2 + c^2}$

9 L'équation de l'axe des x dans l'espace est

a) x = 0 ; y = 0 b) x = 0 ; z = 0 c) y = 0 ; z = 0 d) x = 0

10 L'équation de la droite passant par les deux points (2 ; –1 ; 3) et (0 ; 3 ; 1) est

a) $\overrightarrow{r}$ =(2, -1, 3) + t(2, -4, 2) b) $\overrightarrow{r}$ = (2, -1, 3)+ t(2, 2, 4)

c) $\overrightarrow{r}$ =(2, -4, 2) + t(2, -1, 3) d) $\overrightarrow{r}$ • (2, -4, 2) = 0

11 Le point appartenant à la droite $\overrightarrow{r}$ = (2, -1, 3) + t (1, 2, -1) est :

a) (1, 1, 1) b) (0, 2, -2) c) (3, 1, 2) d) (4, -3, 0)

12 La distance entre les deux plans y = 4 et y = –2 est égale à

a) 3 Unités b) 2 Unités c) 6 Unités d) 8 Unités

Répondre aux questions suivantes:

13 Écrire l'équation cartésienne de chacune des droites suivantes:

a) $\overrightarrow{r}$ = (1, 3, 9) + k (5, 4, 2)

b) La droite passant par le point (0 ; 2 ; 0) et ayant pout vecteur directeur $\overrightarrow{d}$ = (3 ; –1 ; 4).

14 Trouver la mesure de l'angle entre :

a) les deux droites L_1 : 2x = 3y - 1 = z - 3 et L_2: $\overrightarrow{r}$ = (2; -1; 5) + k (-1; 1; 2)

b) les deux plans 3x - y = 5 et x - 2y = 4

15 Trouver les équations cartésiennes du plan qui a pour équation (x ; y ; z) = (2 ; 3 ; 5) + k_1 (-1 ; 3 ; 4) + k_2 (6 ; 1 ;-2) où k_1, k_2 sont deux paramètres

16 Trouver la mesure de l'angle entre les deux plans 2x + 2y + 7z = 8 et 3x - 4y + 4z= 5

Pour plus d'activités, visiter le site : www.sec3mathematics.com.eg

Épreuve (1)

Répondre à l'une des deux questions suivantes:

Question (1): Choisir la bonne réponse:

1. Si $C_n^{n-3} = 20$, alors n = ... (a 3   b 4   c 5   d 6)
2. $i + i^2 + i^3 + \ldots\ldots + i^{100} =$ (a 0   b 1   c 2   d 100)
3. Si A(7 ; –1 ; 8) et B(1 ; 2 ; –4) , alors la longueur de $\overline{AB}$ = ...unités de longueur (a 10   b 11   c 12   d 13)
4. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 8z + 4 =$ est l'équation d'une sphère de longueur de rayon = ...unités de longueur (a 5   b 10   c 15   d 20)
5. Si $L_1 \; \frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z+1}{-4}$ est parallèle à $L_2 : \frac{x+5}{-2} = \frac{y}{k+1} = \frac{z-1}{8}$, alors k = ... (a 3   b 4   c 5   d 6)
6. Si θ est la mesure de l'angle entre les deux vecteurs $\vec{A} = (-2 ; -6 ; 1)$, $\vec{B} = (2; 6 ; -1)$, alors θ = ... (a 30°   b 60°   c 120°   d 180°)

Question (2) : Compléter ce qui suit :

1. Le coefficient de x^5 dans le développement de $(3 - 2x)^7$ est égale à ....
2. L'ensemble solution de $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 0 & x & 3 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} - 8 = 0$ dans R est ....
3. Si $\vec{A} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + m\vec{k}$ et $\vec{B} = -6\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k}$ et $\vec{A} \perp \vec{B}$; alors m = ...
4. Si $\vec{A} = (3 ; 0 ; 4)$ et $\vec{B} = \vec{j} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, alors $\vec{A} \times \vec{B} =$ ....
5. L'équation de la sphère de centre (2 ; –3 ; 1) et de longueur de rayon $2\sqrt{5}$ est ....
6. L'équation de la droite passant par les deux points A(2,-1,4) et B(-1,0,2) est ....

Répondre aux questions suivantes :

Question (3) :

1. Dans le développement de $(2x + \frac{1}{x^2})^{15}$, trouver la valeur du terme constant puis démontrer que ce développement ne contient pas de terme contenant x^5
2. Trouver les différentes formes de l'équation de la droite $\frac{x+3}{2} = \frac{2y-1}{5} = \frac{3z+2}{4}$

Question (4):

1. Trouver l'inverse de la matrice = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & 21 \end{pmatrix}$

2. Trouver les deux racines carrées du nombre complexe $z = 2 - 2\sqrt{3}\ i$ sous la forme trigonométrique

Question (5)

1. En utilisant l'inverse de la matrice, résoudre le système des équations $x + 3y + 2z = 13$ et $2x - y + z = 3$ et $3x + y - z = 2$

2. Trouver le point d'intersection des plans $2x + y - z = -1$, $x + y + z - 2 = 0$ et $3x - y - z = 6$

Épreuve (2)

Répondre à l'une des deux questions suivantes :

Question (1) : Choisir la bonne réponse :

1. Si les deux équations $2x + y = 1$ et $4x + 2y = k$ admettent une infinité de solutions alors k = ...

   (a 0   b 1   c 2   d 3)

2. Si $C^3_{n+1} : C^4_n = 2 : 3$, alors n = ...   (a 2   b 3   c 5   d 11)

3. Si $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 4y + 10z - 8 = 0$ est l'équation d'une sphère de centre M, alors M = ...

   a (-3 ; 2, -5)   b (4, -2, -5)   c (-3 ; -2, -5)   d (3 ; 2 ; 5)

4. Si $\overrightarrow{A} = (-2 ; 4 ; 6)$ et $\overrightarrow{B} = (0 ; k ; 3)$ où $k \in Z^+$ et si $\|\overrightarrow{AB}\| = 7$, alors k = ...

   a 10   b 8   c 6   d 4

5. Si θ est la mesure de l'angle entre les deux vecteurs $\overrightarrow{A} = (2 ; 0 ; 2)$ et $\overrightarrow{B} = (0 ; 0 ; 4)$, alors θ = ...

   a 30°   b 45°   c 60°   d 90°

6. Si $L_1 : \frac{x-3}{2} = \frac{-y-1}{6} = \frac{z}{k}$ est parallèle à $L_2 : \frac{x+2}{6} = \frac{y-4}{M} = \frac{z-1}{3}$, alors K + M = ...

   a -17   b -10   c 10   d 17

Question (2): Compléter ce qui suit :

1. $\omega + \omega^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots \omega^{100} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

2. Si a , b et c sont les longueurs des côtés d'un triangle, alors $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 5 & 7 & 8 \\ \sin A & \sin B & \sin C \end{vmatrix}$ = ...

3. Si $\overrightarrow{A} = (-1; 4; 2)$ et $\overrightarrow{B} = (2; 2; 1)$, alors la composante de $\overrightarrow{A}$ dans la direction de $\overrightarrow{B}$ = ...

4. Si $x^2 + y^2 + z^2 - 4k\,x + 4y - 8z + 2k = 0$ est l'équation d'une sphère de rayon $2\sqrt{5}$, alors k = ...

5. Si le plan $3x - y + 2z + 3 = 0$ et le plan $k\,x - 4y + z - 5 = 0$ sont perpendiculaires, alors la valeur de k = ...

6. Si C (-1, 6, -5) est le milieu de $\overline{AB}$ où A (k - 2, -1, m + 3) et b (2, n - 7, -2); alors k + m - n = ...

Répondre aux questions suivantes :

Question (3) :

1. Trouver le coefficient de x^5 dans le développement de $(1 - x + x^2)(1 + x)^{11}$
2. Démontrer que la droite $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z}{3}$ coupe le plan $3x + 2y + z - 8 = 0$ en un point puis trouver l'angle d'inclinaison de la droite sur le plan.

Question (4):

1. Trouver le rang de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$

   Démontrer ensuite que le système d'équations $2x - y - 3z = 2$, $x + 2y + z = 1$ et $3x - 5y + 2z = 13$ admet une solution unique puis trouver cette solution en utilisant l'inverse de la matrice.
2. Trouver la forme exponentielle du nombre $z = \frac{2 + 6i}{3 - i}$; puis trouver z^{-1} , $\overline{z}$ et $\sqrt{z}$ sous la forme trigonométrique.

Question (5) :

1. Démontrer que l'une des valeurs de l'expression $\sqrt{i} - \sqrt{-i}$ est égale à $\sqrt{2}$
2. Si $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 + (z - 2)^2 = 1$ et $(x + 4)^2 + (y - 4)^2 + (z - 2)^2 = 4$ sont les équations de deux sphères, trouver la distance entre leurs centres.

Épreuve (3)

Répondre à l'une des deux questions suivantes :

Question (1) : Choisir la bonne réponse

1. La somme des coefficients des termes du développement de $(1 + x)^5$ est égale à

   a) 0 b) 5 c) 32 d) 5!
2. Si x est un nombre complexe, alors le nombre de solutions de l'équation $\begin{vmatrix} x^3 + 1 & x - 1 \\ x + 1 & x^3 - 1 \end{vmatrix} = 0$ est égale à ....

   a) 6 b) 5 c) 4 d) 3
3. Si (x ; y ; z) est le milieu de $\overline{AB}$ où A(–4 ; 0 ; 5) et B(–2 ; 4 ; –13) , alors x + y + z = ...

   a) -5 b) -6 c) 3 d) 4
4. Si A(–4 ; –2 ; 3) , B(1 ; 2 ; k) et si la longueur de $\overline{AB}$ est égale à $\sqrt{77}$, alors k = ...

   a) 2 b) 4 c) 6 d) 9
5. Si $\overrightarrow{A} = (-1 ; 3 ; 4)$ et $\overrightarrow{B}$ (0, -2, 5), alors $\|\overrightarrow{AB}\| =$

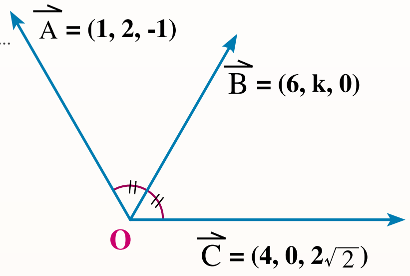
   a) $2\sqrt{3}$ b) $3\sqrt{3}$ c) $4\sqrt{3}$ d) $5\sqrt{3}$

6. La longueur de la perpendiculaire abaissée du point (3 ; 0 ; –5) sur le plan $2x + \sqrt{5}\,y + 4z - 6 = 0$ est égale à ....

a 4 b 5 c 6 d 7

Question 2: Compléter ce qui suit :

1. Si $z = \sin 60^\circ - i \cos 60^\circ$; alors l'argument du nombre z = ...
2. Le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ est égal à ....
3. D'après la figure ci-contre, k = ...



4. La longueur de la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 8z + 4 = 0$ est égale à ....
5. Si la droite $\frac{x+3}{2} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z-2}{k}$ est parallèle à la droite $\frac{x+2}{4} = \frac{y-5}{m} = \frac{z-1}{3}$, alors $k + m$ = ...
6. Si la droite $\frac{x+2}{6} = \frac{y-1}{m} = \frac{z-1}{3}$ est perpendiculaire à la droite $\frac{x-9}{-2} = \frac{y+8}{1}$, alors m = ...

Répondre aux questions suivantes :

Question (3) :

1. Si $(m + x)^n = 3a + 6ax + 5ax^2 + \ldots\ldots$ où $n \in \mathbb{Z}^+$, trouver la valeur de m et a
2. Démontrer que le système des équations $2x - y + 3z = 0$, $4x + 5y - z = 0$ et $2x + 3y - z = 0$ admet une solution autre que la solution nulle puis écrire la forme générale de cette solution.

Question (4) :

1. Si $|z_1| = |z_2| = 1$, $\arg(z_1 z_2^3) = 81^\circ$, $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = 33^\circ$,

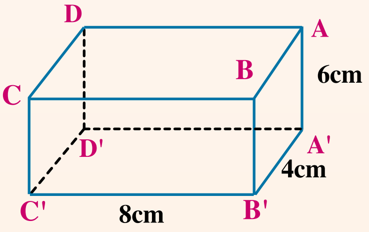
   trouver sous la forme $x + y\,i$ le nombre $(z_1^{15} + z_2^{15})$
2. Trouver la longueur de la perpendiculaire abaissée du point A (–2 ; 3 ; 1) sur la droite $\frac{x+2}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-1}{4}$

Question (5) :

1. Démontrer que $\begin{vmatrix} a_1 & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

2. Dans la figure ci-contre, ABCDC'B'C'D' est un parallélépipède rectangle. Trouver

   $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CA}$



Épreuve (4)

Répondre à l'une des deux questions suivantes :

Question (1) : Choisir la bonne réponse :

1) Si $C^{10}_{r+1} : C^{10}_{r-1} = 21 : 10$, alors r = ...

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6

2) Si $\begin{vmatrix} \log_2^3 & 3 & 9 \\ 0 & \log_3^5 & 7 \\ 0 & 0 & \log_5^x \end{vmatrix} = 4$; alors x = ...

a) 16 b) 32 c) 64 d) 128

3) Si $\overrightarrow{A} = (1; -1; 2)$; $\overrightarrow{B} = (0; 2; -3)$; $\overrightarrow{C} = (-2, 1, 0)$, alors $\|3\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}\| =$ ....

a) $8\sqrt{3}$ b) 11 c) 12 d) $7\sqrt{2}$

4) Si $L_1: \frac{x+2}{-1} = \frac{y+3}{3} = \frac{z+5}{2}$ est perpendiculaire à $L_2: \frac{x}{2} = \frac{y-5}{k} = \frac{z-6}{m}$, alors $3k + 2m =$ ....

a) -1 b) 0 c) 2 d) 4

5) La mesure de l'angle entre les deux droites $x - 1 = \frac{y+2}{\sqrt{2}} = -z + 1$ et $-x = z + 3, y = 4$ est égale à ....

a) 45° b) 120° c) 135° d) 150°

6) Les cosinus des angles directeurs du vecteur (2; -4; 4) sont ....

a) (2, -4, 4) b) (1, -2, 2) c) $(\frac{1}{3} ; \frac{-2}{3} ; \frac{2}{3})$ d) $(\frac{1}{3} ; \frac{2}{3} ; \frac{2}{3})$

Question (2) : Compléter ce qui suit :

1) $(3 + 7\omega + 3\omega^2)(3 - 7\omega^2 + 3\omega) =$ ....

2) Le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -3 & 3 \\ 4 & -12 \end{pmatrix}$ est égale à ....

3) Le centre de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 12y + 2z + 1 = 0$ est ....

4) Si ABCD est un carré de longueur de côté 10 cm , alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$ ....

5) Le vecteur unitaire dans la direction de $\overrightarrow{A} = (2; 3; 2\sqrt{3})$ est ....

6) La longueur de la perpendiculaire abaissée du point (–2 ; –3 ; 1) sur l'axe des x est égale à ....

Répondre aux questions suivantes :

Question (3):

1) Pour x = 1 , trouver le plus grand terme dans le développement de $(3 + 2x)^6$

2) Calculer le volume d'un parallélépipède dont trois côtés consécutifs sont représentés par les vecteurs

$\vec{A} = (1 ; -1 ; 2)$; $\vec{B} = (3 ; -2 ; 0)$; $\vec{C} = (0 ; 2 ; 4)$

Question (4) :

1) Trouver les racines de l'équation $Z^4 + 4 = 0$ sous la forme trigonométrique

2) Soient $\vec{A}$; $\vec{B}$ et $\vec{C}$ trois vecteurs orthogonaux deux à deux. Trouver:

a) Si $\| 2\vec{A} - \vec{B} + 3\vec{C} \|$ b) Si $\vec{A} = (\frac{1}{3} ; \frac{-2}{3} ; \frac{2}{3})$; $\vec{B} = (\frac{3}{5} , 0 ; \frac{-4}{5})$ trouver $\vec{C}$

Question (5):

1) Étudier la possibilité de la résolution des équations x + y = 2, 2x + 3y = 5. Écrire la solution si elle existe.

2) Si $z = \sin \frac{\pi}{9} + i \cos \frac{\pi}{9}$, trouver (z) sous la forme trigonométrique puis trouver les racines cubiques du nombre $(z)^9$

Épreuve (5)

Répondre à l'une des deux questions suivantes :

Question (1) : Choisir la bonne réponse :

1) Si $36\ A^{n-1}_{2n-1} = 9\ A^{n}_{2n}$, alors n = ...

(a) 1 b) 2 c) 3 d) 4)

2) Si les deux équations x + y = 2 et 2x + ky = 4 admettent plus qu'une solution , alors k = ...

(a) -2 b) -1 c) 1 d) 2)

3) Si $\vec{AB} = -3\vec{i} + 3\vec{j} + 7\vec{k}$ et $\vec{BC} = \vec{j} + 5\vec{k}$, alors $\| \vec{AC} \|$ = ...

(a) 13 b) 12 c) 10 d) 9)

4) Si $\vec{A} = (-7; 3; 10)$ et $\vec{B} = (-4; -1; -2)$, alors le vecteur unitaire dans la direction de $\vec{AB}$ = ...

a) $(\frac{3}{13}; \frac{4}{13} ; \frac{12}{13})$ b) $(\frac{3}{13}; \frac{-4}{13} ; \frac{-12}{13})$ c) $(\frac{-3}{13}; \frac{4}{13} ; \frac{12}{13})$ d) $(\frac{-3}{13}; \frac{-4}{13} ; \frac{-12}{13})$

5) Si $\vec{A} = (1; -1; 2)$ $\vec{B} = (3; -2; 0)$, $\vec{C} = (0; 2; 4)$, alors $\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C}$ = ...

a) 10 b) 12 c) 14 d) 16

6) La longueur de la perpendiculaire abaissée du point A(1 ; 0 ; 2) sur la droite $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{-2}$ est égale à ....

a) $\frac{\sqrt{26}}{4}$ b) $\frac{\sqrt{26}}{5}$ c) $\frac{\sqrt{26}}{3}$ d) $\frac{\sqrt{26}}{6}$

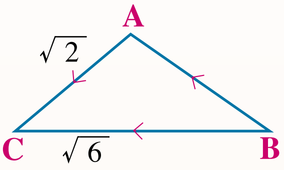
Question (2) : Compléter ce qui suit :

1) $(2 + \frac{3}{\omega})(2 + \frac{3}{\omega^2})(3 - \frac{2}{\omega})(3 - \frac{2}{\omega^2}) = $ ....

2) Si les coefficients de t_6 et t_7 dans le développement de $(a + b)^n$ sont égaux, alors $n =$ ....

3) Le cosinus de l'angle entre les deux droites :

$\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{-2}$ et $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{2}$ est égale à ....



4) Dans la figure ci-contre, si $\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{6}$; $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{2}$; $\overrightarrow{BA} = (-1; 0; 1)$, alors $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} =$ ....

5) La forme standard de l'équation de la sphère de centre (3 ; 4 ; –5) qui est tangente au plan YZ est ....

6) La forme vectorielle de l'équation de la droite passant par le point (2 ; –1 ; 4) et ayant pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{d} = (4, 7, 1)$ est ....

Répondre aux questions suivantes :

Question (3) :

1) Dans le développement de $(1 + x)^{18}$ selon les puissances croissantes de x, Si si le coefficients de t_{2r+4} et t_{r-2} sont égaux, trouver la valeur de r .

2) Si la longueur de la perpendiculaire abaissée du point (0 ; –1 ; 2) sur le plan $\sqrt{2}\,x + y - z + k = 0$ est égale à 2unités de longueur, trouver la valeur de k.

Question (4) :

1) En utilisant l'inverse de la matrice , résoudre le système des équations suivantes :

$2x + y - 2z = 10$, $x + 2y + 2z = 1$ et $5x + 4y + 3z = 6$

2) Si $z_1 = \frac{6 + 4i}{1 + i}$, $z_2 = \frac{26}{5 - i}$ et $z = 4(z_1 - z_2)$, trouver sous la forme exponentielle les racines cubiques du nombre z.

Question (5):

1) Sans développer le déterminant, démontrer que $\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & cb \\ ac & cb & c^2+1 \end{vmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 + 1$

2) Si le plan $2x - y - z + 12 = 0$ coupe la sphère d'équation $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 15$, trouver l'aire du secteur obtenu

Épreuve (6)

Répondre à l'une des deux questions suivantes :

Question (1) : Choisir la bonne réponse :

1. Si $C_n^3 : C_{n-1}^4 = 8 : 5$, alors n = ...
   - a) 5
   - b) 7
   - c) 8
   - d) 9

2. Le coefficient du terme médian dans le développement de $(3x - \frac{1}{6})^{10}$ est égale à ....
   - a) $\frac{-63}{8}$
   - b) $\frac{-67}{8}$
   - c) $\frac{63}{8}$
   - d) $\frac{67}{8}$

3. La mesure de l'angle entre les deux plans $x = y - 1 = 0$ et $y + z - 1 = 0$ est égale à ....
   - a) 30 °
   - b) 45 °
   - c) 60 °
   - d) 75 °

4. Si $\overrightarrow{A} = (2 ; 1 ; -2)$ et $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} = \overrightarrow{C} \times \overrightarrow{B}$, alors $\overrightarrow{B}$ = ...
   - a) (2, -1, -2)
   - b) (2, 1, -2)
   - c) (-2, -1, 2)
   - d) (-2, -1, 3)

5. Si A(–2 ; 0 ; 3) et B(4 ; 2 ; –5), alors $\| \overrightarrow{AB} \|$ = ... unités de longueur
   - a) $\sqrt{12}$
   - b) $\sqrt{40}$
   - c) $\sqrt{44}$
   - d) $\sqrt{104}$

6. Si $\overrightarrow{A} \perp \overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{A} \perp \overrightarrow{C}$, $\overrightarrow{B} = (2; 3; 2)$, $\overrightarrow{C} = (1; 2; 1)$ et $\| \overrightarrow{A} \| = 4\sqrt{2}$, alors $\overrightarrow{A}$ = ...
   - a) (2; 3; 1)
   - b) 6(-4; 0; 4)
   - c) (4; 4; 0)
   - d) (0; -4; 4)

Question (2) : Compléter ce qui suit :

1. $(1 - \frac{1}{\omega})(1 - \frac{1}{\omega^2})(1 - \frac{1}{\omega^4})(1 - \frac{1}{\omega^8})$ .... jusqu'à 10 termes = ...

2. Le rang de la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est égale à ....

3. Le vecteur directeur de la droite d'équation $\frac{x+2}{3} = \frac{z-1}{2}$ est égale à ....

4. Si la mesure de l'angle entre les deux droites $\frac{x}{C} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$ et $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$ est égale à 60° , alors a = ...

5. Si A (1; 0; 0) et B (0 ; 1; 1) appartiennent au plan $k x + y + m z + 2 = 0$, alors k + m = ...

6. Si $\overrightarrow{A} = (1; 0; 2)$ et $\overrightarrow{B} = (2; -1; -2)$, alors $(\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}) \bullet (\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{A})$ = ...

Répondre aux questions suivantes :

Question (3) :

1. Si les coefficients du quatrième terme, du cinquième terme et du sixième terme dans le développement de $(2x + y)^n$ selon les puissances décroissantes de x forment une suite arithmétique, trouver la valeur de n.
2. Une sphère de centre (1; 2; 1) est tangente à la surface du plan $x + y + z = 1$, Trouver l'équation de la sphère

Question (4):

1. Étudier la possibilité de la résolution du système des équations $4x + 3y - 5z = 6$, $3x + 2y + 4z = 12$ et $5x - 2y - 7z = 1$, Trouver ensuite l'ensemble solution de ce système d'équations en utilisant l'inverse de la matrice
2. Si $z_1 = \left(\frac{\sqrt{3} + i}{2}\right)^4$, $z_2 = \sin\frac{\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3}$, $i^2 = -1$ et $z = \frac{z_1}{z_2}$; trouver sous la forme trigonométrique les racines cubiques du nombre z

Question (5):

1. Sans développer le déterminant, démontrer que $\begin{vmatrix} x & a & b \\ a & x & b \\ b & a & x \end{vmatrix} = (x + a + b)(x - a)(x - b)$
2. Trouver les différentes formes de l'équation de la droite passant par le point (2; 1; -3) et parallèle à la droite d'équation $\frac{x - 1}{5} = \frac{y + 3}{2} = \frac{1 - z}{3}$

Épreuve (7)

Répondre à l'une des deux questions suivantes :

Question (1): Choisir la bonne réponse :

1. Si $C_{30}^{r} = C_{30}^{r+10}$ et $A_n^7 = 90 \times A_{n-2}^5$; alors $(n - r)! =$

   a) zero b) 1 c) 10 d) 20!

2. Si le système d'équations $3x - 2y + z = 0$, $6x - 5y + 2z = 0$ et $9x - 6y + kz = 0$ admet des solutions autres que la solution nulle, alors k =

   a) 0 b) 1 c) 3 d) 4

3. La longueur de la perpendiculaire située entre les deux plans $3x + 12y - 4z = 9$ et $3x + 12y - 4z = -17$ est égale à .... unités de longueur

   a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

4. Si $\vec{A} = (4; -k; 6)$; $\vec{B} = (2; 2; m)$ et $\vec{A} // \vec{B}$, alors k + m = ...

   a) -3 b) -2 c) -1 d) zero

5. Si la droite $x = 3y = az$ est parallèle au plan $x + 3y + 2z + 4 = 0$, alors a = ...

   a) 3 b) 2 c) 1 d) -1

6 Si $\overrightarrow{A} = (1; -2; 1)$; $\overrightarrow{B} = (-2; 1; 2)$, alors le vecteur directeur de $\overrightarrow{A}$ dans a direction de $\overrightarrow{B}$ = ...

a $(\frac{4}{9}; \frac{-2}{9}; \frac{-4}{9})$ **b** $(\frac{4}{9}; \frac{2}{9}; \frac{4}{9})$ **c** $(\frac{-4}{9}; \frac{-2}{9}; \frac{-2}{9})$ **d** $(\frac{4}{9}; \frac{-2}{9}; \frac{-4}{9})$

Question (2) : Compléter ce qui suit:

1 $\left(\frac{3+5\omega}{5+3\omega^2} + \frac{5+3\omega^2}{3+5\omega}\right)^8 =$ ....

2 Le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ est égale à ....

3 La mesure de l'angle entre le plan X: $x - z + 1 = 0$, et the plane Y : $2x - 2y - z = 0$, est égale à = ... °

4 La longueur du rayon de la sphère $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 + (z - 5)^2 = 64$ est égale à .... unités de longueur

5 Si $\overrightarrow{A} = (4; -5; 1)$, $\overrightarrow{B} = (2; -k; -2)$; $\overrightarrow{C} = (-4; 4; m-2)$ et $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{C}$; alors $k + m =$ ....

6 Si $\|\overrightarrow{A}\| = 2$, $\|\overrightarrow{B}\| = 3$, $\|\overrightarrow{C}\| = 12$ et $\overrightarrow{A}$; $\overrightarrow{B}$; $\overrightarrow{C}$ sont orthogonaux deux à deux, alors $\|\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}\| =$ ....

Répondre aux questions suivantes:

Question (3) :

1 Si $z_1 = (\sin\frac{\pi}{9} + i\cos\frac{\pi}{9})^5$, $z_2 = (\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})^4$ et $z = \frac{z_1}{z_2}$; trouver sous la forme exponentielle les racines carrées du nombre z.

2 Si $\overrightarrow{A} = (2\cos\theta\ ;\ \log_3 x,\ \sin\theta)$; $\overrightarrow{B} = (\cos\theta\ ;\ \log_3 27\ ;\ 2\sin\theta)$ et $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = 11$, trouver la valeur de x.

Question (4):

1 Dans le développement de $(1 + x)^n$ selon les puissances croissantes de x Si $t_3 = 17$ et $3\,t_2 \times t_4 = 544$, trouver la valeur de n et x

2 Sans développer le déterminant, démontrer que

$$\begin{vmatrix} a+b+2 & a & b \\ 1 & 2a+b+1 & b \\ 1 & a & a+2b+1 \end{vmatrix} = 2(a+b+1)^3$$

Question (5):

1 Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 2y & z \\ x & y & -z \\ x & -y & z \end{pmatrix}$ et si ${}^tA = A^{-1}$, trouver la valeur de x, y et z

2 Trouver le point d'intersection de la droite $x = y = z$ avec le plan $x + 2y + 3z = 12$

Épreuve (8)

Répondre à l'une des deux questions suivantes:

Question (1): Compléter ce qui suit :

1. Si $(1 + \log x)! = 1$, alors $x =$ .... ou ....

2. Si $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 5$, alors la valeur de $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ a+5 & b+5 & c+5 \end{vmatrix} =$ ....

3. La mesure de l'angle entre les deux droites $\vec{r_1} = (-2; 5; -7) + k\,(-6, 6, 8)$ et $\vec{r_2} = (1; -2; 3) + k'\,(4; 12; -6)$ est égale à ....

4. Si $\|\vec{A}\| = 4$; $\|\vec{B}\| = 6$ et la mesure entre les deux vecteurs $\vec{A}$; $\vec{B}$ est égale à $60°$, alors $(2\vec{A} + \vec{B}) \cdot (\vec{A} - \vec{B}) =$ ....

5. L'équation du cercle ayant pour diamètre $\overline{AB}$ où A (7; 1; -4) , B (3; -1; 2) est ....

6. Si $\vec{A} = (1; 2; -4)$; $\vec{B} = (1; 1; k - 1)$ et $\|\vec{A} + \vec{B}\| = 7$ unités de longueur, alors $k =$ ....

Question (2) : Choisir la bonne réponse:

1. Si $\dfrac{a^2 + b^2}{a + bi} = 2 + 3i$, alors $a \times b =$ .... où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$

   a) -6   b) -5   c) 5   d) 6

2. Le rang de la matrice $= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$ est égal à ....

   a) 3   b) 2   c) 1   d) zero

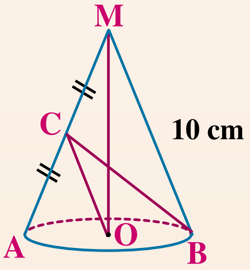
3. Si ABCD est un parallélogramme tel que $\overrightarrow{AB} = (2; 2;-1)$ et $\overrightarrow{AD} = (-1; 2; -3)$, alors l'aire du parallélogramme est égale à .... cm^2

   a) 6   b) $7\sqrt{2}$ c) $3\sqrt{11}$ d) $\sqrt{101}$

4. La figure ci-contre montre un cône circulaire droit de périmètre de base = 12π cm ;

   Si C est le milieu $\overrightarrow{AM}$, alors $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CO} =$ ....

   a) -43   b) -40
   c) -37   d) -33



5 Si $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{B} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$, alors $\overrightarrow{A} \times (\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B}) =$

a $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}$ b $-3\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$ c $-3\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j}$ d $3\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j}$

6 Si $L_1 : x = 0$, $y = z$ et L_2: $y = 0$, $x = z$ sont deux droites dans l'espace dont la mesure de l'angle entre elles est θ ,alors $\theta =$

a 45° b 120° c 150° d 165°

Répondre aux questions suivantes :

Question (3) :

1 En utilisant l'inverse de la matrice, résoudre le système des équations suivantes :
$2x - y + z = -1$, $x - z = 2$ et $x + y = 3$

2 Trouver le point d'intersection des trois plans $2x + y - z = -1$, $x + y + z = 2$ et $3x - y - z = 6$

Question (4):

1 Si $z_1 = 1 - \sqrt{3}\, i$, $z_2 = \cos\theta + i \sin\theta$ et $z_3 = (\cos\frac{\theta}{2} - i \sin\frac{\theta}{2})^2$ et si $z = \frac{z_1 z_2}{z_3}$, trouver le module et l'argument du nombre z puis trouver sous la forme trigonométrique ses deux racines carrées pour $\theta = \frac{\pi}{6}$

2 Pour le système des équations suivantes, étudier la possibilité de trouver une solution autre que la solution nulle :
$x + 3y - 2z = 0$, $x - 8y + 8z = 0$ et $3x - 2y + 4z = 0$

Question (5) :

1 Dans le développement de $(x^2 + \frac{1}{2x})^{3n}$ selon les puissances décroissantes de x :

a: démontrer que le rang du terme constant est $(2n + 1)$

b: trouver le rapport entre le terme constant et le terme médian pour $n = 4$ et $x = 1$

2 Si les deux sphères $(x - 3)^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 16$ et $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 + (z - k)^2 = 25$ sont tangentes, trouve la valeur de k

Épreuve (9)

Répondre à l'une des deux questions suivantes :

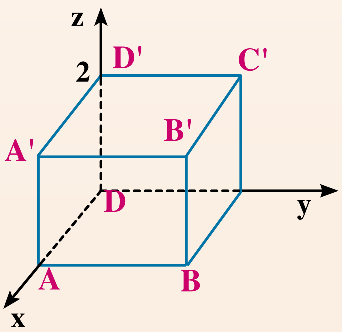
Question (1): Compléter ce qui suit:

1. Si $A^{4}_{x+y} = 360$ et $(2x + y)! = 5040$, alors C^{2x}_{y} = ...
2. L'ensemble solution de $\begin{vmatrix} a+1 & 3 & 2 \\ 0 & a-1 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 21$ est ....
3. Le cosinus de l'angle entre les deux vecteurs $\overrightarrow{A} = (1; -3; 0)$ et $\overrightarrow{B} = (2; 0 ; 1)$ est égale à ....
4. La longueur du rayon de la sphère : x2 + y2 + z2 + 2x - 2y - 4z - 3 = 0 est égale à ....
5. Si $\overrightarrow{A} = (\frac{-1}{2} ; \frac{3}{4} ; k)$ est un vecteur unitaire ; alors k = ...
6. Si $\overrightarrow{A} = (k; -3; 1)$ et $\overrightarrow{B} = (2; 3; -k)$ sont orthogonaux, alors k = ...

Question (2) : Choisir la bonne réponse :

1. $(1 + \omega)^4 + (1 + \omega^2)^4 + (\omega + \omega^2)^4$ = ...
2. Le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est égale à ....
3. Si $\overrightarrow{A} = (3; -2; k)$, $\overrightarrow{B} = (i ; m ; 2)$ et $\overrightarrow{A} // \overrightarrow{B}$; alors k = ... et m = ...
4. Si la mesure de l'angle que fait $\overrightarrow{A} = (2; 4; k)$ avec le sens positif de l'axe des y est égale 45° . alors k = ...
5. Si les deux plans : x + 2y + k z = 2 et 3 x - y + 2 z + 4 = 0 sont perpendiculaires , alors k = ...
6. Dans la figure ci-contre, ABCDA'B'C'D' est un cube de longueur d'arête une unité, alors

   $\overrightarrow{AB`} \cdot \overrightarrow{BD}$ = ...



Répondre aux questions suivantes:

Question (3):

1. Si $z_1 = 2\,(\sin\frac{\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3})$, $z_2 = \sqrt{2}\,(\sin\frac{\pi}{4} - i\cos\frac{\pi}{4})$, $z_3 = 1 + \sqrt{3}\,i$

   et si $z = \dfrac{z_1^{3} \times z_2^{4}}{z_3^{5}}$ trouver sous la forme exponentielle les racines carrées du nombre z .

2 Si le plan $2ax - 3ay + 4az + 6 = 0$ passe par le milieu du segment joignant les centre des deux sphères $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 8y - 2z = 13$ et $x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 4y - 2z = 8$, trouver la valeur de a .

Question (4) :

1 En utilisant l'inverse de la matrice, résoudre le système des équations suivantes :
$x - 2y + 2z = 2$, $3x + 4z = 10$ et $6z - y = 5$

2 Démontrer que le terme constant dans le développement de $(x2 + \frac{1}{x^3})^{5n}$ où $n \in \mathbb{Z}^+$ est égale à $\frac{(5n)!}{(2n)!\,(3n)!}$

Question (5) :

1 Trouver la valeur de k pour que les équations: $kx + y + z = 1$, $x + ky + z = 1$
$x + y + kz = 1$ admettent une infinité de solutions.

2 Trouver la longueur de la perpendiculaire abaissée du point (-4 ; 1 ; 1) sur la droite $\frac{x+3}{1} = \frac{y-1}{\sqrt{5}} = \frac{z+2}{2}$

Épreuve (10)

Répondre à l'une des deux questions suivantes :

Question (1): Compléter ce qui suit:

1 Si $x = \frac{-1 - \sqrt{3}\,i}{2}$ où $i^2 = -1$, alors la valeur numérique de $x^8 + x^4 + 5 = 0 =$ ....

2 Si n! , (n - 2)! et n (2 - n)! sont les longueurs de trois côtés d'un triangle, alors la valeur numérique du périmètre du triangle = ...

3 Si $\overrightarrow{A} = (-2; k ; -3)$ est parallèle à la droite d'équation $\frac{x+2}{4} = \frac{y}{8} = \frac{z-1}{6}$, alors k = ...

4 La mesure de l'angle que fait le vecteur $\overrightarrow{A} = (3 ; 4 ; \sqrt{11})$ avec le sens positif de l'axe des abscisses est égale à ....

5 Si le plan $x - 3y + mz = 5$ et le plan $3x + ky + 6z = 10$ sont parallèles, alors $k \times m =$ ....

6 La longueur de la perpendiculaire située entre les deux plans $4x + 6y + 12z + 18 = 0$ et $4x + 6y + 12z - 10$ est égale à ....

Question (2): Choisir la bonne réponse :

1 $1 - 6x + \frac{6 \times 5}{2 \times 1} x^2 - \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} x^3 +$ .... $+ x^6 = 64$, alors x =

a -1 b 3 c {-1, 3} d 2

2 $(\frac{5 - 3\omega^2}{5\omega - 3} - \frac{2 - 7\omega}{2\omega^2 - 7})^2 =$

a 3 b -3 c 3i d -3i

(3) Si les deux droites : $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ et $\frac{x}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-1}{k}$ sont perpendiculaires, alors ; alors k =

a) 4 b) -4 c) $\frac{9}{2}$ d) $-\frac{9}{2}$

(4) La forme standard de l'équation de la sphère de centre (3 ; –2 ; 1) et de longueur de rayon 5 cm est ....

a) $(x+3)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 5$ b) $(x+3)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 25$

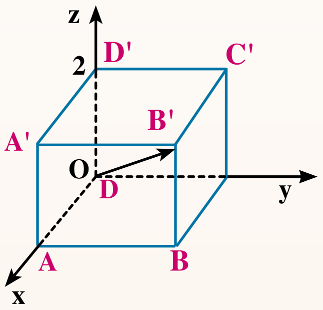
c) $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 25$ d) $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = \sqrt{5}$

(5) La mesure de l'angle entre les deux plans $x + \sqrt{2}\, y - z = 5$ et $x - \sqrt{2}\, y + z = 1$ est égale à

....

a) 0° b) 45° c) 90° d) 135°

(6) **dans la figure ci-contre,** ; ABCD A'B'C'D' est un parallélépipède rectangle. Si A(4 ; 0 ; 0) , C(0 ; 9 ; 0) et D(0 ; 0 ; 7), alors $\| \overrightarrow{AC'} \|$ =



a) $\sqrt{146}$ b) $\sqrt{114}$

c) 5 d) $\sqrt{20}$

Répondre aux questions suivantes:

Question (3) :

(1) Dans le développement de $(2x - 3)^{15}$ selon les puissances décroissantes de x, trouver la valeur de x telle que $13t_3 + 10t_4 + t_5 = 0$

(2) Sans développer le déterminant, démontrer que

$$\begin{vmatrix} y+z & x & x \\ y & z+x & y \\ z & z & x+y \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{vmatrix}$$

Question (4) :

(1) Démontrer que : $\left(\frac{1 + \sin\theta + i\cos\theta}{1 + \sin\theta - i\cos\theta}\right)^n = \cos n\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i \sin n\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

(2) Trouver l'équation de la droite passant par le point (3 ; -1 ; 0) et perpendiculaire au plan $\vec{r} = (2 ; 1 ; 1) + t\,(1; 2 ; -1)$

Question (5):

(1) En utilisant l'inverse de la matrice, résoudre le système des équations suivantes :

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$; $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{2}{z} = \frac{1}{2}$ et $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} - \frac{4}{z} = \frac{4}{3}$

où x ; y et z ne sont pas nuls

(2) Trouver la composante vectorielle du vecteur $\overrightarrow{AB}$ telle que A (2 ; 1 ; 0) et B $(3, 1, \sqrt{3})$ dans la direction de $\overrightarrow{M}$ où $\overrightarrow{M} = (3, 2, 2\sqrt{3})$

Réponses des exercices

Unité (1) : Arrangements, Combinaisons et formule du binôme

Réponses des Exercices (1 - 1)

1) c 2) d 3) b 4) d
5) a 6) c 7) a 8) b
9) b 10) 40 11) 14 12) 2520
13) a 2401 b 840
14) a 24 b 48 c 40
15) a $n = 2$ $r = 8$ b $n = 7$ $r = 3$
c $n = 7$ $r = 4$ d $r = 2$ $n = 5$
16) $n = 20$; $r = 13$ 17) $\frac{16}{7}$ 18) $n = 16$
19) $r = 4$; $n = 7$
20) La plus petite valeur de la variable est $n = 5$
21) $r = 2$; $n = 11$ 22) $\frac{28}{9}$ 23) $r = 4$
24) $x \in \{0, 1, 2, 3, ..; 30\}$; $y = \frac{1}{2}$; $y = \frac{-1}{2}$
25) $n \in \{8, 9, 10, ...\}$ 26) $m + n = 20$
27) a $n = 2$ b $n = 2$ c $n = 6$
28) $r = 8$; $n = 79$
29) a $n = 13$ ou $n = 12$ b $r = 5$; $r = 9$
30) a $r = 4$; $n = 14$ b $r = 4$; $n = 12$
c $r = 2$ d'où $n = 10$
d $n = 13$ e $r = 10$; $n = 10$
31) 6 32) 10 33) 218025
34) 1260 35) 304
36) a 4 b 10 c 20
37) a 9 b 20 c 54
38) a 495 b 252 c 369

Réponses des Exercices (1 - 2)

1) a 2) d 3) d 4) c
5) b 6) d 7) b 8) c
9) a 10) $x = 1$ $x = -3$
11) a 1,0151 b 0,986 c 2,003
d 0,321
12) $x = \frac{1}{2}$ 13) Démonstration
14) a $16x^{-4} + 16x^{-2} + 6 + x^2 + \frac{1}{16}x^4$
b $x^5 - 5x^3 + 10x - 10x^{-1} + 5x^{-3} - x^{-5}$
c $2x^4 + 24x^2 + 8$
d $180x + 480x^3 + 64x^5$
15) $n = 8$ $x = \pm 2$ 16) $n = 14$
17) $2ab = 1$ 18) $t_7 = 924x^6$
19) $t_6 = -231x^7$ $t_7 = 924x^4$
20) $84x$ 21) $x = \frac{2}{3}$ 22) $\frac{t_6}{t_5} = \frac{1}{20}$
23) $x = \pm\frac{8}{15}$

Réponses des Exercices (1 - 3)

1) c 2) c 3) c 4) c
5) c 6) c 7) d 8) b
9) c 10) c
11) $t_9 = 495$ 12) $\frac{1365}{128}$
13) Il n'y a pas de terme contenant x^{-6}
14) 4608 - 5376
Le développement ne contient pas x^2
15) $n = 15$ 16) 1920 17) C_{2n}^{n}
18) Le terme constant $= C_{16}^{8}$
19) Si $r = 3$, alors $k = 1$ Si $r = 4$, alors $k = 2$
Si $r = 5$, alors $k = 5$ $\frac{3}{10}$
20) $a = 2$ 21) $a = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ 22) $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}$
23) t_4 est le terme constant $= 84$
Les deux termes médians sont t_5 ; t_6 $x = -1$
24) $x = \frac{1}{3}$ 25) $\frac{21}{55}$

Réponses des Exercices (1 - 4)

1) b 2) c 3) d 4) b
5) a $\frac{15}{2x^4}$ b $\frac{x^4}{3}$ c $\frac{28x^8}{45}$ d $\frac{10}{63}$

(6) $\frac{4}{11}$ (7) $n = 5$ $a = 2 ; b = 3$

(8) $n = 5$

(9) $n = 8$

(10) t_4 et t_5 sont égaux et ont chacun la plus grande valeur numérique.

(11) $n = 8$

Réponses des exercices généraux

(1) a (2) c (3) d (4) c

(5) a (6) c (7) d (8) b

(9) c (10) c (11) b

(12) $r = 3$ $n = 6$ (13) $n = 10$ $m = 4$

(14) $r = 4$ $n = 10$ (15) $n = 10$ $r = 1$

(16) $r = 7$ $n = 11$ (17) $r = 4$ $n = 10$

(18) a 1530 b 111 (19) $n = 6$ $r = 5 ; 35$

(20) $r = 8$ $n = 79$

(21) $r = 5$ La plus petite valeur $n = 5$

(22) En dérivant par rapport à x

En posant $x = 1$ $n \times 2^{n-1}$

(23) a En posant $x = 1$ dans les deux membres

b En posant $x = -1$ 0

c En posant $x = 3$ 4^{10}

(24) $n = 15$ $r = 10$ $t_{11} = 3003$

(25) $n = 7$ (26) $n = 29$ $10! = 3628800$

(27) $n = 9$

(28) Les termes sont t_{20}, t_{21}, t_{22} $^{27}g_9$

(29) $n = 10 ; m = \frac{-1}{3}$ $t_6 = 252$

(30) t_{15} est le terme constant

$g = 14$ $\frac{t_{12}}{t_{11}} = \frac{3}{2}$

(31) $x = \frac{1}{2}$ Il n'y a pas de terme constant

(32) Les termes sont $t_5 ; t_6, t_7$

(33) $x = \frac{3}{5}$

(34) 495 (35) $x = \frac{3}{2}$ (36) $a + b x^2 = 0$

(37) $n = 9$ (38) $x = \pm \frac{1}{2}$

(39) $n = 10, x = \frac{5}{6}$ (40) $n = 12, c = 1$

(41) $n = 8$ $x = \pm 1 ; y = \pm 2$

(42) (1) $924 x^{-6}$ (2) $t_4 = C^{12}_3 (\frac{2}{3})^6 x^3$

(43) 40 (44) $n = 20 ; x = \sqrt[3]{2}$

Le développement ne contient pas de terme constant

(45) $r = 4$ $r = 3$ $c = \frac{2}{3}$

(46) $r = 10$ $t_{11} = C^{10}_{15} \frac{21}{80}$

(47) a $r = 6$ $k = 3$ $r = 7$ $k = 7$ b $\frac{4}{35}$

(48) Démonstration

(49) $r = 2$ $n = 6$ $y = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

(50) $a = \pm \frac{\sqrt{10}}{2}$ (51) $\frac{t_7}{t_6} = \frac{3}{2}$

(52) $\frac{t_6}{t_5} = \frac{1}{27x^3}$ pour $x = \frac{1}{3}$ $t_6 = t_5$

(53) $r = 6$ $x = \frac{3}{2}$ (54) $\frac{21}{55}$

Réponses de l' épreuve cumulative

(1) a (2) c (3) b (4) c

(5) c (6) $n = 25$ $x = \pm \frac{1}{4}$

(7) a $n = 10$ b $r = 2$ $t_3 = 45$

(8) $n = 25$ $m = \frac{1}{100}$

(9) 1) 105 2) 61

(10) $n = 16$ $x = \pm \frac{4}{3}$

Unité (2) : Nombres complexes

Réponses des Exercices (2 - 1)

(1) (3, -4) (2) x

(3) 5 (4) 1 (5) -5 (6) 1

(7) $\sqrt{2}\, e^{\frac{3\pi}{4} i}$ (8) 120°

(9) 4 (cos (-6°) + i sin (-60°))

(10) θ (11) 60° (12) π

(13) $L_1 L_2 i$ (14) 180°

(15) 2 (16) $e^{\frac{3\pi}{4} i}$ (17) 300°

(18) 1 (19) 3(cos 120° + i sin 120°)

(20) $-\theta$

21 a $5\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

b $4\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$

c $\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

d $5(\cos 126{,}9° + i\sin 126{,}9°)$

e $4(\cos(-40) + i\sin(-40))$

22 a $\sqrt{2}\ ;\ -\frac{\pi}{4}$ b $2\ ;\ \frac{\pi}{6}$

c $2\ ;\ -\frac{3\pi}{4}$ d $\sec 20°\ ;\ \frac{\pi}{9}$

23 i 24 $\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{3}i}$ 25 $\frac{1}{2}e^{\frac{-\pi}{3}i}$

26 a $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\ i$ b $-\sqrt{2} + \sqrt{2}\ i$

c $\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{2}\ i$

27 $\frac{1}{2}e^{\frac{5\pi}{3}i}$ 28 -64

29 $|z| = 1$ 30 $-\sqrt{3}\ (\cos 45 + i\sin 45)$

31 a $\frac{\pi}{2}$ b $\frac{13}{12}\pi$ c $\frac{11}{21}\pi$ d π

32 $\sin = \frac{-i}{2}\left(e^{\theta i} - e^{-\theta i}\right)$

Réponses des Exercices (2 - 2)

1 a $8\cos^4 8 - \theta \cos^2 1 + \theta$

b $16\sin^5 20 - \theta \sin^3 5 + \theta \sin\theta$

2 a $2 \quad 2i \quad -2 \quad -2i$

b $z_1 = 1 + \sqrt{3}\ i \qquad z_2 = -2$

$z_3 = 1 - \sqrt{3}\ i$

c $z_1 = 2i \quad z_2 = -\sqrt{3} - i$

$z_3 = \sqrt{3} - i$

3 $z_1 = 3(\cos 36° + i\sin 36°)$

$z_2 = 3(\cos 108° + i\sin 108°)$

$z_3 = 300$

$z_4 = 3(\cos(-108°) + i\sin(-108°))$

$z_5 = 3(\cos(-36°) + i\sin(-36°))$

4 $z_1 = \sqrt{2}\ e^{\frac{\pi}{12}i} \qquad z_2 = \sqrt{2}\ e^{\frac{7\pi}{12}i}$

$z_3 = \sqrt{2}\ e^{-\frac{11\pi}{12}i} \qquad z_4 = \sqrt{2}\ e^{-\frac{-5\pi}{12}i}$

5 a $z_1 = \sqrt{3} - i \qquad z_2 = -\sqrt{3} + i$

b $z1 = \sqrt[4]{2}\ \left(\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right)$

$z_2 = \sqrt[4]{2}\ \left(\cos\left(-\frac{\pi 7}{8}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi 7}{8}\right)\right)$

c $z_1 = 2 + 2i \qquad z_2 = -2 - 2i$

d $4 + i\ ;\ -2 - i \quad e \pm (3 - 2i)$

6 $z_1 = 2 \qquad z_2 = 2(\cos 120 + i\sin 120)$

$z_3 = 2(\cos(120°) + i\sin(-120°))2$

7 $z_1 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$

$z_2 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}$

$z_3 = \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$

$z_4 = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

8 pour $k = 0$ L'expression $= 2 + 2i$

pour $k = 1$ L'expression $= -2 - 2i$

9 $z_1 = 2e^{\frac{\pi}{8}i} \quad z_2 = 2e^{-\pi\frac{7}{8}i}$

10 $18 - 26i\ ;\ -18 + 26i$

11 $\cos^4\theta = \frac{1}{8}[\cos 4\ 4 + \theta \cos 2\ 3 + \theta]$

Réponses des Exercices (2 - 3)

1 $-9\ {}^2\omega$ 2 9 3 1 4 -1

5 4 6 -2 7 -37 8 -1

9 ${}^2\omega$ 10 2 11 $(ı - b)2$

12 1 13 $\pm\sqrt{3}\ i$

14 $(1,1)$ 15 3 16 $-{}^2\omega$

17 1 18 6

20 a 2 b -1 c -1 d $\frac{-27}{49}$ e i

21 0 22 $x^2 - x + 1 = 0$

23 $-2i$ algébrique

$z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$ trigonométrique

$2e^{-\frac{\pi}{2}i}$ exponentielle

$\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

24 $n = 3k$ où $k \in y$

25 a $1 + \omega$ b 3

Réponses de l' épreuve cumulative

1 1 2 $2(\cos 120° + i\sin 120°)$

3 $90 - \theta°$ 4 $-i + \omega$

5) -1 6) 60° 7) a 8) b
9) d 10) b 11) c 12) c
13) c 14) b 15) 1 16) b
17) b

18) a -1 b $3 - 3i$ c $2 + 2i$

19) a $z_1 = 3\sqrt{3}$ (cos 150 + i sin 150)
b $-z_2 = \sqrt{3}$ (cos 105 + i sin 105)
c $z_1 z_2 = 9$ (cos (-105) + i sin (-105))
d $\frac{z_1}{z_2} = 3$ (cos 45 + i sin 45)

20) a $z_1 = 7\,e\,i$ b $z_2 = 5\,e^{\frac{-\pi}{2}i}$
c $z_3 = \frac{1}{2}\,e^{\frac{\pi}{3}i}$ d $z_4 = \sqrt{7}\,e^{0,71\,-\,i}$
e $z_5 = 4\,e^{\frac{\pi}{6}i}$

21) module $z = 2\cos\frac{\theta}{2}$ argument $z = \frac{\theta}{2}$

22) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Réponses de l' épreuve cumulative

1) a Premier b Troisième c Quatrième

2) 3 ; 1

3) a $2 ; \frac{\pi}{6}$ b $\sqrt{2} ; \frac{3\pi}{4}$
c $4 ; \frac{\pi}{2}$ d $5 ; \pi$ e 5, -0,93d

4) i $\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$
$\cos(\frac{-3\pi}{4}) + i\sin(\frac{-3\pi}{4})$

5) $-5 + 2i$

6) $6e^{\frac{\pi}{3}i}$ $2(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin -\frac{\pi}{9})$
$(\cos\frac{7\pi}{9} + i\sin -\frac{7\pi}{9})$
$2(\cos\frac{-5\pi}{9} + i\sin -\frac{-5\pi}{9})$

7) $\frac{1}{2}(-1 - \sqrt{3}\,i)$ $(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3}))$
$(\cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin -\frac{2\pi}{3})$

8) $\sqrt{6}\,e^{\frac{\pi}{12}i}$ $z = \sqrt[8]{6}\,(\cos(\frac{\pi}{12} + 2k\pi)$
$+ i\sin(\frac{\pi}{12} + 2k\pi))$ où k = 0, 1, 2, 3

9) $2\,e^{\frac{-2\pi}{3}i}$

10) $\left|\frac{1+z}{1-z}\right| = \cot\frac{\theta}{2}$ argument $= \frac{\pi}{2}$

11) $z = \omega$ $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$
the two roots are $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$
$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}(\cos\frac{-3\pi}{4} + i\sin\frac{-3\pi}{4})$

Unité 3: Déterminants et Matrices

Réponses des Exercices (3 - 1)

1) a 2) b 3) a 4) a
5) a 6) b 7) d 8) d
9) d 10) c 11) -420
12) -2 13) x = -1
14) $x_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$; $x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$
15) x = 1
16) 0 17) 0

Réponses des Exercices (3 - 2)

1) b 2) a 3) c 4) c

5) a 5 -4 b 1
c 3, $x = \frac{-23}{5}$

6) a $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ b $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
c $\frac{1}{1}\begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}$
d $\frac{1}{1}\begin{pmatrix} \sec\theta & -\tan^2\theta \\ -1 & \sec\theta \end{pmatrix}$
e $a^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$ f $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Réponses des Exercices (3 - 3)

1) d 2) a 3) b 4) a
5) a 6) c 7) b 8) b
9) a 10) b

11) a x = 8 ; y = -12
b a = 2 ; b = 1 c c = 5 ; d = 2
d b = 7 ; c = 0 ; d = -1
e x = 1 ; y = -1 ; z = 2
f x = 1 ; y = 2 ; z = 3

12 a) $x = \frac{-13}{3}$ $y = \frac{3}{3} = 1$ $z = \frac{23}{3}$

b) $x = 1$ $y = 1$ $z = -2$

c) $x = -2$ $y = 1$ $z = 1$

d) $x = 2$ $y = 1$ $z = 1$

13 Démonstration

14 a) $x = L$; $y = L$; $z = -L$

b) $x = -2L$; $y = z = L$

c) $x = L$; $y = L$; $z = -L$

Réponses des exercices généraux

1 0 **2** $\{10\}$ **3** 0 **4** 0

5 ± 3 **6** $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}$ **7** 1

14 $k = -1$ **15** $k = -4$

16 $(2, -1, 3)$ **17** $(-4, 3, 2)$

18 Solution générale = $\{(-2k, k, 0)\}$

19 $(1, -2, 2)$ **20** $(1, -1, 2)$

21 L'équation a une solution unique

Réponses de l' épreuve cumulative

1 70 **2** $\begin{pmatrix} -17 & 4 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$ **3** ± 4

4 7 **5** 0 **6** $\mathbb{R} - \{13 ; -1\}$

7 1 **8** 3 **10** $r(a) = 2$

12 $(1, 2, 3)$

14 L'équation a une solution unique

16 a) A n'est pas singulière

b) B est singulière

c) M n'est pas singulière

d) D est singulière

[II] Géométrie dans l'espace

Unité (1) : Géométrie et mesure dans deux et dans trois dimensions

Réponses des Exercices (1 - 1)

1 0 **2** $x z$; $y = 0$

3 $(6,4,0)$; $(6, 0, 2)$ **4** $(\frac{1}{2} ; -2, 3)$

5 $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2 = 25$

6 1 **7** 5 **8** $(1, \frac{3}{2}; 6)$

9 $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

10 $(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2 = 16$

11 a) $2\sqrt{13}$ b) $\sqrt{13}$ c) 5

12 a) $3\sqrt{5}$ unités carrées

b) $2\sqrt{21}$ unités carrées

13 $(3, 0, 0)$; $(3, 3, 0)$; $(3, 0, 3)$

$(0, 3, 0)$; $(0, 3, 3)$; $((0, 0, 3)$

$(3 ; 3, 3)$; $(0, 0, 0)$

14 $3 \pm 2\sqrt{6}$

15 a) $(\frac{5}{2} ; \frac{-1}{2}; \frac{3}{2})$ b) $(\frac{-9}{2}; \frac{9}{2}; \frac{13}{2})$

16 $a(-6 ; 10, -1)$

17 a) $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 7$

b) $(\frac{3}{2}, 1, -2)$

$(x - \frac{3}{2})^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = \frac{29}{4}$

c) $(x-1)^2 + (y+6)^2 + (z-1)^2 = 42$

18 a) Le centre = $(0, 0, 0)$, $r = 3$

b) Le centre = $(1 ; -2, 0)$; $r = \sqrt{5}$

c) Le centre = $(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 1)$; $r = 1$

19 $(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 9$

20 $(1 ; 0, 2)$ **21** 4 length Unité

22 $z = 2$ **23** Zyad's answer

Réponses des Exercices (1 - 2)

1 $\sqrt{29}$ **2** $\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$

3 $(\frac{4}{\sqrt{29}}; \frac{-3}{\sqrt{29}}; \frac{2}{\sqrt{29}})$

4 41' 57''36° **5** 90°

6 ± 2 **7** 82,355°

8 $-\vec{i} - 6\vec{j} + \vec{k}$ **9** $(\frac{-2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3})$

10 a) $(6, -5, 1)$ b) $(8, -9, 2)$

c) $(2, -3, 2)$

11 a) $(4, -2, 8)$ b) $(-3, \frac{-13}{2}; \frac{17}{2})$

c) $(-2, -19- 27)$

12 a) $\sqrt{5}$ b) 3 c) 1 d) $\sqrt{17}$

13 Démonstration **14** $(-14, 7, 14)$

15 $\vec{A} = (0, y ; z)$

16 $\| \vec{A} + \vec{B} \| \leqslant \| \vec{A} + \vec{B} \|$

17 $\pm \frac{5\sqrt{3}}{3}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$

Réponses des Exercices (1 - 3)

1 0 **2** $\vec{i}$ **3** 2

4 orthogonaux

5 parallèles **6** 142,125°

7 32 **8** $\vec{k}$ **9** -7 **10** [-1, 1]

11 57,02° **12** 3

13 a 10 b -28 c 0

14 a 32,51° b 98,7° c 90°

15 $-15\vec{i} - 7\vec{j} - 9\vec{k}$ b $10\vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k}$

c $24\sqrt{3}\ \vec{C}$

16 a 144 b $144\ \vec{C}$ c 144

d $-288\ \vec{C}$ e 0 f $144\ \vec{C}$

17 $\left(\frac{7}{\sqrt{75}} ; \frac{5}{\sqrt{75}} ; \frac{1}{\sqrt{75}}\right)$

18 a 16,7183 unités b $\frac{5}{2}\sqrt{19}$

19 a 5 b $\sqrt{80}$

20 9 unités

21 a $\vec{A}$; $\vec{B}$ ne sont pas orthogonaux

$\vec{A}$; $\vec{B}$ ne sont pas parallèles

b $\vec{E}$; $\vec{O}$ ne sont pas orthogonaux

$\vec{E}$; $\vec{O}$ ne sont pas parallèles

c $\vec{A}$; $\vec{B}$ ne sont pas orthogonaux

$\vec{A}$; $\vec{B}$ sont parallèles

Réponses de l' épreuve cumulative

1 XZ , Y = 0

2 a (6 ; 8 ; 0) b (0 ; 8 ; 0)

c 53,13°, 36,87°, 90°

3 (5 ; -3, 2) **4** 7 ou -1

5 $\frac{-2}{3}$; -12 **6** 45°

7 y = 0 **8** $x^2 + y^2 + z^2 = 14$

9 $(4 ; 1, -\frac{1}{2})$ **10** 0

11 $(\frac{3}{5}; \frac{-4}{5}; 0)$ **12** $K^2 + E^2 + F^2 = 1$

13 0 **14** axe des y

15 Démonstration **16** (0 ; 0, 3) 3

17 (3, 1, -7) **18** $(\frac{1}{3} ; \frac{-2}{2} ; \frac{2}{3})$

19 31,96° $6{,}5\ \vec{i} + 2{,}2568\ \vec{j} + 11{,}0292\ \vec{k}$

20 $\sqrt{14}$

21 $\|\vec{A}\| = \|\vec{B}\| = 1$ $\theta = 90°$

22 a 36 b -36 c 0

23 -23 **24** - 400 joule

25 a Démonstration b Démonstration

Réponses de l' épreuve cumulative

1 4 **2** -3 **3** $(2, \frac{-1}{2} ; 1)$

4 a (0, 8, 4) b (0, 0, 4)

5 $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z+1)^2 = 13$

6 (-3 ; -3, 13) **7** $\left(\frac{5}{\sqrt{38}} ; -\frac{2}{\sqrt{38}} ; \frac{3}{\sqrt{38}}\right)$

8 ±3 **9** 5 **10** -3

11 $\frac{18}{5}$ **12** 90° **13** 9 square Unité

14 $x^2 + (y-4)^2 + z^2 = 16$

15 $\sqrt{14}$ $\sqrt{27}$

16 $\pm 21(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$

17 (-24 ; 48, 36)

18 a (1 ; -11, -5) b (6 ; -66 ; -30)

c (-2 ; 22, 10)

19 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}} ; \frac{1}{\sqrt{3}} ; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

20 $\theta_x = 64{,}896°$ $\theta_y = 124{,}45°$

$\theta_z = 45°$

Unité (2) : Droites et plans dans l'espace

Réponses des Exercices (2 - 1)

1 $\vec{r} = (2 ; -1, 3) + k(-1 ; 4 ; 2)$

2 90° **3** 60° **4** $\frac{1}{\sqrt{11}}$

5 (2 ; -2 ; 1)

6 a $\frac{1}{\sqrt{14}} ; \frac{2}{\sqrt{14}} ; \frac{3}{\sqrt{14}}$

(b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\frac{1}{\sqrt{3}}$

7 (a) $x = 4 + 2k$; $y = -2 + k$; $z = 5 - k$

$\frac{x-4}{2} + \frac{y+2}{1} + \frac{z-5}{-1}$

(b) $x = 3 + 2k$; $y = -1 - k$; $z = 5 + k$

$\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-5}{1}$

(c) $x = 3 + 3k$, $y = -2 - 6k$; $z = -k$

$\frac{x-3}{3} = \frac{y+2}{-6} = \frac{z}{-1}$

(d) $x = 3 + k$, $y = 2 + k$; $z = 5 + k$

$x - 3 = y - 2 = z - 5$

8 $\vec{r} = (3, -2, 2) + k\,(1, 4, -3)$

9 (a) $\vec{r} = (1 ; -2, 1) + k\,(-1, 1, -2)$

(b) $\vec{r} = (8 ; 1 ; 4) + k\,(4 ; 1 ; 1)$

(c) $\vec{r} = (3 ; 1 ; -2) + k2\,(-19, -11, 4)$

10 (a) 60° 30' 41'' (b) 53° 41' 23''

(c) 84° 2' 20''

11 (a) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

(b) $C_1 C_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$

12 $\vec{r} = (1 ; -1 ; 0) + k\,(5 ; -1, -1)$

13 $n = 7$; $\left(\frac{23}{5} ; \frac{-3}{5} ; \frac{41}{5}\right)$

Réponses des Exercices (2 - 2)

1 c **2** c **3** c

4 b **5** c **6** b

7 $2x - 3y + 4z = 21$

(a) N'appartient pas

(b) $\vec{e}$ n'est pas parallèle au plan

8 (a) (3, 0, 0) (b) (-1, -2, 0)

(c) (2, 1, 3) ; (-1, 2, 1) ; (-4, 3, 0)

(d) (1, 1, 1,) ; (0, 2, 2) ; (2, 0, 0)

9 $x + 2y - 3z = 0$

10 $4x + 10y - 7z = -2$

11 $-4x - 10y + 7z = 2$

14 (a) $2x + 3y + 5z = 27$

(b) $-2x + 4y - z + 4 = 0$

(c) $-x + 3y + 2z = 9$

15 (4, 2, 3)

16 (10, 5, 4) . $\vec{r}$ = 20 directed form

17 (a) $z = 0$ (b) $z = 2$

(c) $y = 0$; $y = 5$; $x = 0$

18 $9x + 17y + 16z + 23 = 0$

19 (a) $78{,}578 = \theta°$ (b) $63{,}07 = \theta°$

(c) $59{,}53 = \theta°$

20 (a) = (-1, 2, 1) (b) $2\sqrt{6}$

(d) L'équation vectorielle de la droite d'intersection est

$\vec{r} = \left(0, \frac{-1}{19} ; \frac{-17}{19}\right) + k\,(19 ; -9 ; 37)$

21 (a) $3y + 4z - 20 = 0$

(b) $x + 2y + 2z - 12 = 0$

(c) $f = 5$ $p = 2$

(d) L'équation vectorielle de la droite d'intersection est

$\vec{r} = (2, 0, 5) + k\,(-2, 4, -3)$

(e) $X = -12$ $X = 3$

Réponses de l' épreuve cumulative

1 b **2** a **3** c **4** c

5 c **6** c **7** c **8** b

9 d **10** d **11** $\frac{\sqrt{370}}{10}$

13 point (1, -2, 7) **14** (2, -1, 2)

15 (-2, 4, 2)

16 La longueur perpendiculaire = $\frac{21}{6}$

Réponses de l' épreuve cumulative

1 60° **2** $\frac{\sqrt{30}}{6}$

3 $x = -1 + 2k$, $y = -k$, $z = 3 - 3k$

4 60 ° **5** $5x + 2y - 3z - 19 = 0$

6 2,5 **7** (-1, 2, 0) **8** c

9 c **10** a **11** c

12 c

13 a $\frac{x-1}{5} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-9}{2}$

b $\frac{x}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{4}$

14 a 50,1° b 45°

15 $10x - 22y + 19z = 49$

16 57,456

Réponses des épreuves

Épreuve 1

Q 1

1 d 2 a 3 d 4 b

5 a 6 d 7 $2x - 3y + 4z = 21$

Q 2

1 -6048 2 {2}

3 6 4 (8, -5, -6)

5 $(x-2)2 + (y+3)2 + (z-1)2 = 20$

6 $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-4}{2}$

Q 3

1 Le terme constant est $t_6 = 3075072$

2 $x = -3 + 12k$; $y = \frac{1}{2} + 15k$

$z = -\frac{2}{3} + 8k$

Q 4

1

$$\begin{pmatrix} 68 & -31 & -5 \\ 41 & -19 & -3 \\ -13 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

2 $z_1^{\frac{1}{2}} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

$z_2^{\frac{1}{2}} = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$

Q5

1 $(x ; y, z) = (1, 2, 3)$

2 $(x, y, z) = \left(2, -\frac{5}{2} ; \frac{5}{2}\right)$

Épreuve 2

Q1

1 c 2 d 3 a 4 a

5 b 6 a

Q2

1 ω 2 0 3 $\frac{8}{3}$

4 0 ou $\frac{1}{2}$ 5 -2 6 -33

Q3

1 220 2 e = 30°

Q4

1 rg(A) = 3 (x, y, z) = (2, -1, 1)

2 $= \frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}i\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}i\right)\right)$

$2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$

$\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi 3}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi 3}{4}\right)\right)$

Q5

2 10

Épreuve 3

Q1

1 c 2 b 3 a 4 d

5 b 6 a

Q2

1 $-\frac{\pi}{6}$ 2 1 3 3 4 5

5 -10,5 6 12

Q3

1 n = 6 ; m = 3 ; a = 243

(x, y, z) = (k ; -k ; -k)

Q4

1 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} i$

2 la longueur de la perpendiculaire = 0

Q5

2 (-4, -8, -6) ; (-4, 8, -6) ; -12

Épreuve 4

1 b 2 a 3 d 4 c

5 a 6 c

Q2

1 -40 2 2 3 (-4, 6, -1)

4 100 5 $\left(\frac{2}{5} ; \frac{3}{5} ; \frac{2\sqrt{3}}{5}\right)$

(6) $\sqrt{10}$

Q3

(1) La plus grande valeur est $t_5 = c_6^2\,(3)^4\,(2)^2$ $= 4860$

(2) 16 unités^3

Q4

(1) $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi 3}{4} + i\sin\frac{\pi 3}{4}\right)$

$z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi 3-}{4} + i\sin\frac{\pi 3-}{4}\right)$

$z = \sqrt{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})\right)$

(2) $a = \sqrt{14}$; $b - \frac{\sqrt{2}}{10}$ $(4, 5, 3)$

Q5

(2) $\cos\left(-\frac{7}{18}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{7}{18}\pi\right)$

Première racine $= \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$

Deuxième racine $= \cos\frac{\pi 5}{6} + i\sin\frac{\pi 5}{6}$

Troisième racine $= \cos(-\frac{\pi 5}{6}) + i\sin(-\frac{\pi 5}{6})$

Épreuve 5

Q1

(1) b (2) d (3) a (4) b

(5) d (6) c

Q2

(1) 133 (2) 20 (3) $\frac{1}{9}$ (4) 3

(5) $(x-3)2 + (y-4)2 + (z+5)2 = 9$

(6) $\vec{r} = (2, -1, 4) + k\,(4, 7, 1)$

Q3

(1) $r = 6$ (2) $k = 7$; $k = -1$

Q4

(1) $(x ; y, z) = (\frac{1}{3} ; \frac{10}{3} ; -3)$

(2) $z_1 2 = ^{\frac{1}{3}}\ e^{-\frac{\pi}{6}i}$ $z_2 2 = ^{\frac{1}{3}}\ e^{-\frac{\pi}{2}i}$

$z_3 2 = ^{\frac{1}{3}}\ e^{-\pi\frac{5}{6}i}$

Q5

(2) 11π

Épreuve 6

Q1

(1) c (2) a (3) c (4) c

(5) d (6) b

Q2

(1) 243 (2) 3 (3) (3, 0, 2)

(4) 1 ou $-\frac{13}{5}$ (5) -5 (6) -41

Q3

(1) $n = 19$ ou $n = 8$

(2) $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (x-1)^2 = 3$

Q4

(1) $(x, y, z) = (2, 1, 1)$

(2) $z^{\frac{1}{2}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$

$z^{\frac{1}{2}} = \cos(-\frac{\pi 3}{4}) + i\sin(-\frac{\pi 3}{4})$

Q5

(2) $\frac{x-2}{5} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{3}$

Épreuve 7

Q1

(1) b (2) c (3) a (4) c

(5) d (6) a

Q2

(1) 1 (2) 3 (3) 45° (4) 8

(5) -1 (6) $\sqrt{157}$

Q3

(1) $\sqrt{z} = e^{-\frac{\pi}{36}i}$ $\sqrt{z} = e^{-\pi\frac{35}{36}i}$

(2) $x = 125$

Q4

(1) $n = 18$; $x = \pm\frac{1}{3}$

Q5

(1) $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ $y = \pm\frac{1}{2}$

$z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

(2) Le point d'intersection est (2, 2, 2)

Épreuve 8

Q1

(1) $1 \; ; \; \frac{1}{10}$ (2) 5 (3) 90° (4) -16

(5) $(x - 5)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 14$

(6) 11 ou -1

Q2

(1) أ (2) b (3) د (4) أ

(5) b (6) أ

Q3

(1) x = 1 ; y = 2 ; y = -1 (2) $\left(2, \frac{-5}{2} ; \frac{5}{2}\right)$

Q4

(1) $z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\,(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)$

$z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\,(\cos \pi + i \sin \pi)$

(2) r(a) = 2 r(a) < Le nombre d'inconnues

Q5

(1) $\frac{15}{112}$ (2) k = 10 ou k = -4

Épreuve 9

Q1

(1) 10 (2) ± 2 (3) $\frac{\sqrt{2}}{5}$ (4) 3

(5) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ أو $\frac{-\sqrt{3}}{4}$ (6) 9

Q2

(1) 0 (2) 3 (3) $6 \; ; \; \frac{-2}{3}$ (4) $\pm 2\sqrt{3}$

(5) $\frac{-1}{2}$ (6) 120°

Q3

(1) $z^{\frac{1}{2}} = \cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)$

$z^{\frac{1}{2}} = \cos\left(\frac{11}{12}\pi\right) + i \sin \frac{11\pi}{12}$

(2) a = -2

Q4

(1) x = 2 ; y = 1 ; z =1

Q5

(1) k = 1 (2) $\frac{\sqrt{30}}{2}$

Épreuve 10

Q1

(1) 4 (2) 5 (3) -4

(4) $56{,}44^\circ$ (5) -18 (6) $\frac{9}{7}$

Q2

(1) c (2) b (3) d

(4) c (5) c (6) a

Q3

(1) L'ensemble solution = $\left\{ 0, \frac{1}{2} \; ; \frac{9}{2} \right\}$

Q4

(2) $\vec{r} = (3, -1, 0) + k' (1, -1, -1)$

Q5

(1) r = 2

y = 3

z = 6

(2) $\left(\frac{27}{5} \; ; \frac{18}{5} \; ; o \frac{18\sqrt{3}}{5}\right)$